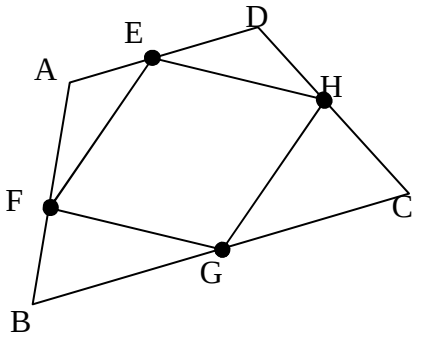
الشكل الرباعي وأبناؤه/ د. علي عثمان

عندما نُعيّن منتصفات أضلاع شكل رباعي ونوصل بينها ينتج شكل رباعي جديد. نسمي الشكل الرباعي الناتج " **ابن الشكل الرباعي**". بكلمات أخرى: إذا كان $ABCD$ شكلاً رباعياً وإذا كانت E,F,G,H هي منتصفات أضلاعه على التوالي فإنّ الشكل الرباعي $EFGH$ هو ابن الشكل الرباعي $ABCD$. ونسمي الشكل الرباعي $ABCD$ أب الشكل الرباعي $EFGH$. (أنظر الشكل 1).

نظرية 1:

ابن أي شكل رباعي هو متوازي أضلاع.

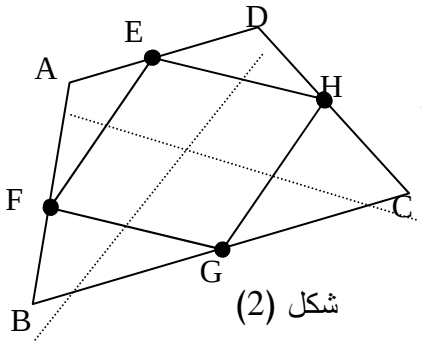


شكل (1)

برهنة النظرية: ليكن $ABCD$ شكلاً رباعياً وليكن $EFGH$ ابنه. (أنظر الشكل 1).

نرسم القطر BD. (أنظر الشكل (2)) ننظر في المثلث BAD. فيه EF خط المنتصفين فهو يساوي نصف BD ويوازيه. ننظر في المثلث BCD. الضلع GH فهو خط المنتصفين فهو يساوي نصف BD ويوازيه. لذلك فإنّ EF وَ GH متساويان ومتوازيان. لذلك فإنَّ الشكل الرباعي $EFGH$ هو متوازي أضلاع.

(ملاحظة: بالإمكان برهنة النظرية لو رسمنا القطر الثاني).



شكل (2)

نظرية 2: كل ضلعين متجاورين في الشكل الرباعي الابن يوازيان قطري الشكل الرباعي الأب. طول كل ضلع من أضلاع الشكل الرباعي الابن يساوي نصف طول القطر الموازي له من قطري الشكل الرباعي الأب.

برهنة النظرية: نعود إلى الشكل (2). نلاحظ أنّ EF يوازي BD وَ EH يوازي AC، بنفس الطريقة نبرهن أنّ كل ضلعين آخرين متجاورين يوازيان القطرين BD وَ AC.

سؤال (1): إذا كان الشكل الرباعي الأب متوازي أضلاع فماذا يكون الابن؟

جواب: يكون الابن متوازي أضلاع.

سؤال (2): إذا كان الشكل الرباعي الأب مستطيلاً فماذا يكون الابن؟

جواب: يكون الابن معيناً.

التفسير: قطرا المستطيل متساويان، لذلك فإنَّ كل ضلعين متجاورين للابن متساويان (لأنّ طول كل منهما يساوي نصف طول القطر الموازي). بما أنّ الابن متوازي أضلاع وفيه ضلعان متجاوران متساويان فهو بالضرورة معين.

سؤال (3): إذا كان الشكل الرباعي الأب معيناً فماذا يكون الابن؟

جواب: يكون الابن مستطيلاً.

التفسير: حسب النظرية (2) فإن كل ضلعين متجاورين في الشكل الرباعي الابن يوازيان قطري المعين. بما أنّ قطري المعين متعامدان، فإنّ زوايا الشكل الرباعي الابن قائمة، فهو مستطيل.

سؤال (4): إذا كان الشكل الرباعي الأب مربعاً فماذا يكون الابن؟

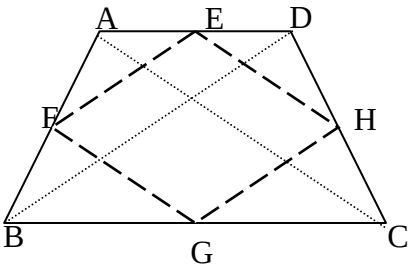
جواب: يكون الابن مربعاً.

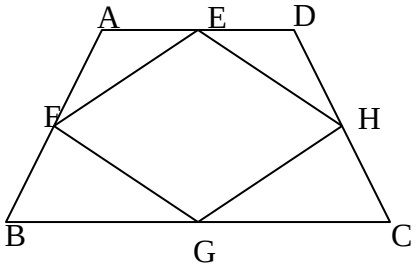
سؤال(5): إذا كان الشكل الرباعي الأب شبه منحرف متساوي الساقين فماذا يكون الابن؟

جواب: يكون الابن معيناً.

برهان: بما أنّ الشكل $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين فإنّ قطريه متساويان. (أنظر الشكل (3)).

أي أنّ $BD = AC$. لذلك فإنّ $\frac{1}{2}BD = GH = EH = \frac{1}{2}AC$. لذلك فالشكل الرباعي $EFGH$ هو معين، لأنّه متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان.





سؤال(6): هل يوجد شبه منحرف بحيث أن ابنه شبه منحرف؟

جواب: كلا. لأنّ ابن أي شكل رباعي هو متوازي أضلاع.

سؤال(7): هل يوجد شبه منحرف بحيث أن ابنه مربع؟

جواب: نعم، يجب أن يكون شبه المنحرف متساوي الساقين وقطراه متعامدان.

سؤال (8): ما هو ابن الدالتون؟

جواب: بما أنّ قطري الدالتون متعامدان فإنّ ابن الدالتون مستطيل.

سؤال (9): هل يوجد دالتون بحيث أنّ ابنه مربع؟

جواب: نعم، عندما يكون قطرا الدالتون متساويين. (ارسم دالتوناً بحيث يكون قطراه متساويين. انتبه أنّ الشكل ليس بالضرورة مربعاً).

نأتي الآن إلى تصنيف الأشكال الرباعية حسب أبنائها.

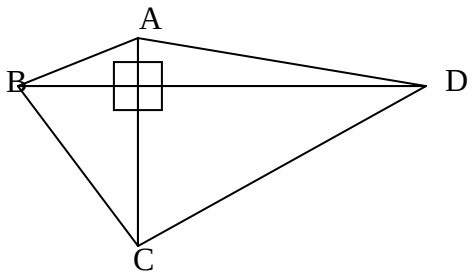
سؤال (10): إذا كان ابن الشكل الرباعي مستطيلاً فماذا يكون الأب (الشكل الرباعي الأصلي)؟

جواب: ابن الشكل الرباعي هو دائماً متوازي أضلاع كما نعلم. حتى يكون الابن مستطيلاً يجب أن يكون قطرا الشكل الرباعي الأب متعامدين.

نستنتج: إذا كان الابن مستطيلاً فإنَّ الأب هو شكل الرباعي قطراه متعامدان، والعكس صحيح.

نستنتج: مجموعة المستطيلات هي مجموعة أبناء الأشكال الرباعية ذات قطرين متعامدين. من الواضح أنّ مجموعة الأشكال الرباعية ذات قطرين متعامدين تحوي الدالتونات (لذلك فهي تحوي المعينات والمربعات) (وتحوي أشكالاً رباعية أخرى ليست دالتونات).

انظر الشكل: $ABCD$ هو شكل رباعي قطراه متعامدان وليس دالتوناً عندما لا ينصف القطران أيّ منها الآخر.



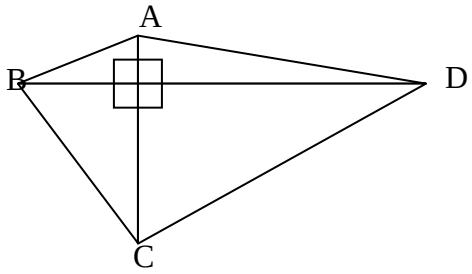
نتيجة: مجموعة الأشكال الرباعية ذات قطرين متعامدين هي " مجموعة آباء المستطيلات".

سؤال (11): إذا كان الشكل الرباعي معيناً فماذا يكون الأب؟

جواب: يجب أن يكون قطرا الشكل الرباعي الأب متساويين. مجموعة الأشكال الرباعيّة التي قطرا كل منها متساويان هي مجموعة آباء المعينات. واضح أنّ مجموعة آباء المعينات تحوي المستطيلات وتحوي الأشباه المنحرفة متساوية الساقين، وتحوي أشكالاً أخرى.

سؤال (12): ما هي مجموعة آباء المربعات؟

جواب: آباء المربعات هي مجموعة التقاطع بين آباء المستطيلات وآباء المعينات وهي تساوي مجموعة الأشكال الرباعية التي قطرا كل منها متساويان ومتعامدان. **انظر الشكل:**



$AC = BD$ وَ $AC \perp BD$. هذا شكل رباعي ابنه هو مربّع. لاحظ أنّ الشكل $ABCD$ ليس متوازي أضلاع. مجموعة آباء المربعات تحوي المربعات وتحوي أشكالاً أخرى.

سؤال (13): ما هي مجموعة آباء متوازيات الأضلاع؟

جواب: مجموعة الأشكال الرباعية كلها.

سؤال (14): ما هي مجموعة آباء الأشباه المنحرفة ؟

الجواب: المجموعة الفارغة لا يوجد أب لشبه المنحرف.

العلاقة بين مساحة الأب ومساحة الابن.

نظرية: مساحة الشكل الرباعي الابن تساوي نصف مساحة الشكل الرباعي الأب.

برهان: EH قاعدة وسطى في المثلث ADC لذلك فهو ينصّف DO، أي أنّ النقطة L هي منتصف DO. وبنفس الطريقة نستنتج أنّ I منتصف EF و J منتصف FG و K منتصف GH . نتذكّر النظرية: المستقيمات الواصلة بين منتصفات أضلاع مثلث تقسّم المثلث إلى أربعة مثلثات متطابقة. ننفّذ هذه النظرية على المثلثات AOD ، AOB ، BOC ، COD . لذلك يمكن الترميز للمساحات كما ترى في الشكل. واضح أنّ مساحة الشكل الرباعي الأب = $4(S_1+S_2+S_3+S_4)$ بينما مساحة الابن= $2(S_1+S_2+S_3+S_4)$.