قواسم العدد والأعداد المنتظمة(بالطريقة الاكتشافية)

د. علي عثمان

أ) قواسم العدد

قواسم العدد 6 هي 1,2,3,6 وقواسم العدد 4 هي 1,2,4 وقواسم العدد 10 هي 1,2,5,10 . نقصد بقواسم العدد الطبيعي a جميع الأعداد الطبيعية التي يقبل العدد a القسمة عليها بدون باق. (a يقسم على b بدون باق إذا وفقط إذا وُجد c طبيعي بحيث أن a=b.c). **لنتمعن في الجدول التالي** :

العدد	قواسمه	عدد القواسم
1	1	1
2	1,2	2
3	1,3	2
4	1,2,4	3
5	1,5	2
6	1,2,3,6	4
7	1,7	2
8	1,2,4,8	4
9	1,3,9	3
10	1,2,5,10	4
11	1,11	2
12	1,2,3,4,6,12	6
13	1,13	2
16	1,2,4,8,16	5
25	1,5,25	3
21	1,3,7,21	4
28	1,2,4,7,14,28	6
36	1,2,3,4,6,9,12,18,36	9

نلاحظ أن الأعداد التي **عدد قواسمها 2** هي... 2,3,5,7,11,13 وهي جميعاً **أعداد أولية** والأعداد التي **عدد قواسمها فردي:** 1,4,9,16,25 الصفة المميزة لها أنها **جميعاً مربعات لأعداد طبيعية**.

$$25 = 5^2 \;,\; 16 = 4^2,\; 9 = 3^2 \;,\; 4 = 2^2,\; 1 = 1^2$$

أما الأعداد التي **عدد قواسمها أعداد زوجية** فهي ليست مربعات لأعداد صحيحة. أيّ أن الجذر التربيعي لكل منها **عدد غير صحيح** (سنثبت أن هذه الملاحظات صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد).

تحليل العدد إلى العوامل الأولية:

افترض أن القارئ يعرف طريقة التحليل واكتفي بإعطاء أمثلة:

- $18 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$
- $225 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5^2$
- $216 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$
- $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$
- $700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 7$

أي أن تحليل العدد إلى العوامل الأولية هو كتابته على النحو: $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \ldots\ldots \cdot p_k^{n_k}$ ، حيث أن $p_1 \ldots\ldots p_k$ هي أعداد أولية مختلفة و $n_1 \;,\; \mathrm{n}_2 \;,\; \ldots\ldots \;,\; \mathrm{n}_k$ هي أعداد طبيعية.

حساب عدد القواسم

أمثلة:

1. عدد قواسم العدد 32 .نحلل العدد 32 للعوامل الأولية نجد أن $32=2^5$ أما قواسمه فهي $2^0=1,2,2^2,2^3,2^4,2^5$ وعددها هو 6.
2. عدد قواسم العدد 81 . نحلل العدد 81 للعوامل . نجد أن $81=3^4$ أما قواسمه فهي $1, 3,3^2,3^3,3^4$ وعددها هو 5 .

3. من السهل أن نلاحظ أنّ قواسم العدد p^n (حيث أن p هو عدد أولي وn هو عدد طبيعي) هي: $p^0,p^1,p^2.....,p^n$ وعددها هو $n+1$.

سؤال : ما عدد قواسم العدد 5^7 ؟ الجواب هو 8.

سؤال : ما عدد قواسم العدد 4^5 ؟ الجواب 6 خطأ لان العدد 4 ليس أولياً.

نستطيع أن نكتب $2^{10} = (2^2)^5 = 4^5$,لذلك فإن عدد القواسم هو11.

4. عدد قواسم العدد 96 . نحلل العدد 96 للعوامل فنلاحظ أن $96=3^1.2^5$.

كل قاسم لهذا العدد هو حاصل ضرب احد قواسم العدد 3 في احد قواسم العدد 2^5 . للعدد3^1 يوجد قاسمان وللعدد 2^5 توجد 6 قواسم . لذلك فإن عدد القواسم للعدد 96 هو 12=2.6 . ولمزيد من الايضاح قواسم 96 هي :

$3^0.2^0 , 3^0.2^1 , 3^0.2^3 , 3^0.2^4 , 3^0.2^5$

$3^1.2^0 , 3^1.2^1 , 3^1.2^3 , 3^1.2^4 , 3^1.2^5$

تعريف : قاسم مشترك لعددين هو عدد طبيعي يقبل العددان القسمة عليه بدون باق.

أمثلة:

1. واضح أن العدد 1 هو قاسم مشترك لأي عددين طبيعيين.
2. قواسم مشتركة للعددين 15 وَ 24 هما : 1وَ 3.
3. قواسم مشتركة للعددين 45 وَ 60 هي : 1,3,5 .

عددان متنافران (غريبان) : هما عددان بحيث أن القاسم المشترك الوحيد لهما هو 1 .

أمثلة: العددان 3 وَ 5 متنافران. العددان 2 وَ 3 متنافران. العددان 61 , 70 عددان متنافران. العددان 6 وَ 16 ليسا متنافرين لأن 1,2 هما قاسمان مشتركان لهما.

أمثلة: العددان 2^5 وَ 3^6 متنافران اذا كان p وَ q عددين أوليين مختلفين فإن p^n وَ q^m متنافران (m وَ n طبيعيان).

نظرية : اذا كان a وَ b عددين طبيعيين مختلفين ومتنافرين فإن عدد قواسم a.b يساوي حاصل ضرب عدد قواسم a في عدد قواسم b .

سأوضح ذلك بالأمثلة : (1) إذا كان $a=2^3$ وَ $b=3^2$ ، فنعرف أن عدد قواسم a هو 4 وعدد قواسم b هو 3 . قواسم a هي $2^0,2^1,2^2,2^3$ نضرب كلا منها في 3^0 نحصل على 4 قواسم للعدد a.b . وعندما نضرب كلا منها في 3^1 نحصل على 4 قواسم أخرى للعدد a.b . وعندما نضرب كلا منها 3^2 فنحصل على 4 قواسم أخرى للعدد a.b, وبذلك فإن عدد قواسم a.b هو 12=3.4=4+4+4.

انتبه إلى أن النظرية ليست صحيحة إن لم يكن العددان متنافرين مثلاً a=4 وَb=6 عدد قواسم a هو 3 وعدد قواسم b هو 4 (3.4=12) بينما $a.b=4.6=2^2.2.3=2^3.3^1$ وعدد قواسمه 4.2=8 .

نظرية : إذا كانت a,b,c اعداداً طبيعية متنافرة (أي أن كل اثنين منها متنافران) فإن عدد قواسم العدد a.b.c يساوي حاصل ضرب عدد قواسم كل منها , وذلك لان a.b.c=a.(b.c) .

العددان a وَ b.c متنافران فعدد القواسم يساوي عدد قواسم a مضروباً في عدد قواسم b.c , وبما أن عدد قواسم b.c يساوي حاصل ضرب عدد قواسم b في عدد قواسم c (حسب النظرية السابقة) فإن عدد قواسم a.b.c يساوي حاصل ضرب عدد قواسم a في عدد قواسم b في عدد قواسم c .

نظرية: اذا كانت $a_1,a_2,.......,a_n$ اعداداً طبيعية فإن عدد قواسم حاصل ضربها $a_1\cdot a_2\cdot.......\cdot a_n$ يساوي حاصل ضرب عدد قواسم كل منها .

سؤال : ما عدد قواسم العدد $3^5.2^7$ ؟ الجواب 48= 8×6

سؤال : ما عدد قواسم العدد $5^2\cdot3^4\cdot2^3$ ؟ الجواب : 60= 4×5×3

سؤال : اذا كانت p,q,r اعداد أولية مختلفة فما هو عدد قواسم العدد $p^m.q^n.r^k$

الجواب :$(m+1)(n+1)(k+1)$

سؤال : ما عدد قواسم العدد : $11^2\times12^4\times6^5$ ؟

الحل: $6^5.12^4.11^2 = (3\times2)^5\times(3\times4)^4.11^2$

$=11^2\times4^4\times3^4\times3^5\times2^5$

$=11^2\times3^4\times2^8\times3^5\times2^5=2^{13}.3^9.11^2$

عدد القواسم $=3\times10\times14=420$

نظرية : اذا كانت $p_1, p_2, ..., p_k$ اعداداً أولية مختلفة وإذا كانت $n_1 , n_2 , n_3 , ... , n_k$ أعداداً طبيعية, فإن عدد قواسم العدد $p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot.....\cdot p_k^{n_k}$ هو:

$(n_1+1)(n_2+1)\cdot.....\cdot(n_k+1)$

سؤال : ما عدد قواسم العدد $5^2\times3^2\times2^3\times7^1\times11^1$؟

جواب: عدد القواسم هو $144 = 2\times2\times4\times3\times3$

سؤال ما عدد قواسم العدد : $15^2\times3^3\times4^2\times21\times49$؟

جواب: $49\times21\times4^2\times3^3\times15^2=7^2\times7^1\times3^1\times2^4\times3^3\times5^2\times3^2=7^3\times2^4\times5^2\times3^6$

عدد قواسم $=4\times5\times3\times7=420$

مربعات الأعداد:

عند تربيع العدد $2^1\times5^3$ نحصل على $2^2\times5^6$ وعند تربيع العدد $3^3\times2^3\times5^2$ نحصل على $3^6\times2^6\times5^4$. وعند تربيع $p^n.q^n$ نحصل على $p^{2n}.q^{2n}$. نلاحظ أن العدد الناتج عن تربيع عدد طبيعي هو عدد من الصورة $p_1^{n_1}\cdot......\cdot p_m^{n_m}$ حيث أن $p_1 ,......, p_m$ أعداد أولية مختلفة وَ $n_1 ,......, n_m$ أعداد طبيعية زوجية.

مثلاً العدد $3^6.2^8$ هو مربع لعدد صحيح ألا وهو العدد $3^3.2^4$ والعدد $7^2.5^4.2^6$ هو مربع للعدد $7.5^2.2^3$. أي أن الجذر التربيعي للعدد $2^8\times3^6$ هو العدد $2^4\times3^3$ والجذر التربيعي للعدد $7^2\times5^4\times2^6$ هو العدد $7\times5^2\times 2^3$.

عدد قواسم المربع الكامل:

نقصد بالمربع الكامل العدد الذي جذره التربيعي هو عدد صحيح (العدد الذي هو مربع لعدد صحيح). مما تقدم رأينا أن المر بع الكامل هو عدد عند تحليله للعوامل نحصل على عدد من الصورة $p_1^{n_1}\cdot......\cdot p_m^{n_m}$ حيث أن $p_1 ,......, p_m$ أعداد أولية مختلفة و

$n_1 ,......, n_m$ أعـداد زوجيـة . لـذلك فـإن عـدد قواسـمه هـو $(n_1+1)........(n_k+1)$ وهـذا حاصل ضرب لأعداد فردية ، لذلك فإن النتيجة هي عدد فردي.

النتيجة: عدد قواسم المربع الكامل هو عدد فردي.

عـدد قواسـم العـدد الـذي لـيس مربعـاً كـاملاً : إن لـم يكـن العـدد مربعـاً كـاملاً فـإن إحـدى القـوى لأحـد عواملـه الأوليـة ليسـت عـدداً زوجيـاً (عـدد فـردي) مـثلاً : $3^5\times2^4\times7^2$, $2^3\times3^2\times5^5$ ليست مربعات كاملة.

عـدد قواسـم العـدد الأول 90=3×5×6 وعـدد قواسـم الثـاني 72= 6×3×4 وهـي أعـداد زوجيـة . وبشـكل عـام إذا لـم يكـن العـدد مربعـاً كـاملاً وكـان تحليـل العـدد للعوامـل الأوليـة $p_1^{n_1}......p_k^{n_k}$ ($p_1 ......p_k$ أعـداد أوليـة مختلفـة) فـإن إحـدى القـوى هـي عـدد فـردي . عـدد القواسـم هـو : $(n_1+1)........(n_k+1)$. أحـد الأعـداد الظـاهرة فـي حاصـل الضـرب عـدد زوجي (عدد فردي +1) لذا فإن حاصل الضرب هو عدد زوجي.

النتيجة : إن لم يكن العدد مربعاً كاملاً فإن عدد قواسمه هو عدد زوجي.

سؤال : عدد اكبر من 100 وأصغر من 140 عدد قواسمه فردي , ما هو العدد ؟

الجواب : العدد هو مربع كامل بين 100 و 140 فهو 121 .

أحجية:

فـي فنـدق كبيـر 200 غرفـة مرقمـة بالأرقـام مـن 1 وحتـى 200 . فـي كـل غرفـة مصـباح . فــي مكتــب الفنــدق لوحــة عليهــا أزرار موصــلة بالمصــابيح يســتطيع الموظــف أن يضــيء وان يطفـئ المصـابيح التـي فـي الغرفـة بواسـطتها . الأزرار مرقمـة بأرقـام الغـرف . الضـغط علـى الـزر يطفـئ المصـباح أن كـان مُضـاءاً ويضـيء المصـباح أن كـان المصـباح مُطفئاً .

<u>كانـت جميـع المصـابيح مُطفـأة</u> . ضـغط الموظـف علـى جميـع الأزرار ثـم ضـغط علـى جميـع الأزرار التـي أرقامهـا زوجيـة , ثـم ضـغط علـى جميـع الأزرار التـي أرقامهـا تقسـم علـى 3 , ثـم الضـغط علـى جميـع الأزرار التـي أرقامهـا تقسـم علـى 4 , وهكـذا دواليـك وأخيـرا ضـغط على الزر رقم 200 . ما هي أرقام الغرف المُضاءة بعد هذه العمليات ؟

الحـلّ: إذا تـم الضـغط علـى الـزر عـدداً فرديـاً مـن المـرات فـإن المصـباح الموصـل بـذلك الـزر بعـد تنفيـذ هـذا سيكون مضـاءاً . وإذا تـم الضـغط علـى الـزر عـدداً زوجيـاً مـن المـرات

فـإن المصـباح الموصـل بـالزر بعـد تنفيـذ هـذا سـيكون مُنطفئـاً . إنتبـه إلـى إن عـدد المـرات التــي يـتم فيهـا الضـغط علـى الـزر يسـاوي عـدد قواسـم رقـم ذلـك الـزر. المصــابيح التــي تبقـى مضـاءة هـي تلـك التـي أرقامهـا مربعـات كاملـة , لأن عـدد القواسـم لكـل منهـا هـو عـدد فـردي. أي أنّ المصـــابيح المضـــاءة هـــي التـــي أرقامهـــا : 1 , 4 ,9 ,16 , 25 , 36 , 49 , 64 , 81 , 196 , 169 , 144 و 121 و 100 .

سـؤال: abab هـو عـدد مـن أربعـة أرقـام , رقـم الآحـاد b ورقـم العشـرات a ورقـم المئـات b ورقم الآلاف a .

أ- إذا كان ab عدداً أولياً فما هو عدد قواسم abab ؟

ب- إذا كان عدد قواسم العدد ab هو 4 فما هو عدد قواسم abab ؟

حل: $abab = ab \times 101$ العدد 101 هو عدد أولي فعدد قواسمه هو 2.

أ- ab أولي فعدد قواسمه 2 لذلك عدد قواسم abab هو $2\times2=4$.

ب- عدد قواسم ab هو 4 لذلك عدد قواسم abab هو $4\times2=8$

ب) أعداد منتظمة

تعريـف: العـدد المنـتظم هـو العـدد الـذي مجمـوع قواسـمه يسـاوي ضـعفيه. (اذا كـان x منتظمـاً فـإن مجمـوع قواسـم x يسـاوي 2 x) **تعريـف أخـر مكـافئ** : العـدد المنـتظم هـو الـذي يساوي مجموع قواسمه الأصغر منه .(انتبه : العدد هو قاسم لنفسه).

مثلاً العدد 2^n : قواسم هذا العدد هي: $1,2,2^2 ......2^n$

ولو فرضنا أن مجموعها y فإن : $y = 1+2+2^2+......2^n$

$$2y = 2+2^2+2^3+.......+2^{n+1}$$

لذلك فإنّ $y = 2^{n+1} - 1$

مـن الواضـح ان مجمـوع قواسـم 2^n يسـاوي عـدد فـردي وهـذا لا يمكـن أن يسـاوي ضـعفي 2^n . أي أن 2^n ليس منتظماً .

لـو تمعنـا فـي الجـدول الـذي فـي بدايـة المقـال لوجـدنا أن العـددين 6 وَ 28 همـا عـددان منتظمـان لانّ قواسـم العـدد 6 هـي 1,2,3,6 ومجموعهـا يسـاوي 12 وهـو ضـعفي العـدد 6.

وقواسم العدد 28 هي 1, 2 , 4 , 7 , 14 , 28 ومجموعها يساوي 56 وهو ضعفي العدد 28 . وهذان العددان يمكن كتابتهما: 3.2=6 و $28=7.2^2$.هما من الصورة $P \cdot 2^n$ حيث أن P عدد أولي .

سنبحث الآن عن أعداد منتظمة ذات الصورة $P{\cdot}2^n$ حيث أن P عدد أولي . إن قواسم هذا العدد هي $1,2,2^2,\ldots,2^n \;;\; P, P{\cdot}2, P{\cdot}2^2, \ldots P{\cdot}2^n$

ومجموعها هو : $(1+2+2^2+\ldots+2^n)+P(1+2+2^2+\ldots+2^n)$

وهو يساوي $(P+1).(2^{n+1}-1)$. لكي يكون العدد منتظماً يجب أن يتحقق :

$$(P+1)\,(2^{n+1}-1) = 2P{\cdot}\,2^n = P{\cdot}2^{n+1}$$

أي أن : $P{\cdot}2^{n+1}+2^{n+1}-P-1=P{\cdot}2^{n+1}$ أي أنّ $2^{n+1}=P-1$. والآن علينا إيجاد قيم n التي عندها يكون $2^{n+1}-1$ عدداً أولياً .

$n=1$: $P=2^2-1=3$ أولي نحصل على العدد المنتظم $3.2=6$

$n=2$: $P=2^3-1=7$ أولي نحصل على $7 \cdot 2^2=28$ منتظم.

$n=3$: $P=2^4-1=15$ ليس أولياً.

$n=4$: $P=2^5-1=31$ أولي نحصل على $31 \cdot 2^4=496$. العدد 496 هو عدد منتظم .

$n=5$: $P=2^6-1=63$ ليس أولياً

$n=6$: $P=2^7-1=127$ أولي نحصل على العدد المنتظم $127.2^6=8128$.

نُذكّر بالقانون $a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+ab^{n-2}+\ldots\ldots b^{n-1})$

بالاعتماد على هذا القانون نلاحظ أن 2^k-1 ليس أولياً إذا لم يكن k أولياً . لو فرضنا أن $k=rs$ حيث أن r و s عددان طبيعيان اكبر من 1 فإن:

$$2^k-1=2^{rs}-1=(2^r)^s-1$$

$$=(2^r-1)((2^r)^{s-1}+(2^r)^{s-2}+\ldots\ldots+1)$$

وهو عدد مؤلّف (ليس أولياً). فلكي يكون $2^{n+1}-1$ أولياً ينبغي أن يكون العدد n+1 عدداً أولياً . وهذا الأمر لاحظناه في الأمثلة السابقة. ولسوء الحظ عندما n=10 العدد $2^{11}-1=2047=89.23$ هو عدد غير أولي . أي أن الادعاء:

إذا كان k أولياً فإن 2^k-1 أولي هو إدعاء خاطئ . الأمر الذي يجعل من مسألة إيجاد الأعداد المنتظمة ذات الصور $P.2^n$ مسألة شائكة وهي تكافئ مسألة إيجاد قيم k الأولية التي عندما يكون العدد 2^k-1 أولياً . وهي مسألة ما زالت مفتوحة للبحث. الأعداد الأولية ذات الصورة 2^n حيث أنّ n أولي تسمى أعداد **ميرسن** .

مسائل للبحث:

1) هل توجد أعداد منتظمة من الصورة $P.3^n$ حيث أن P أولي ؟
2) هل توجد أعداد منتظمة من الصورة $P.5^n$ حيث أن P أولي ؟
3) برهن أن الأعداد ذات الصورة $P.4^n$ أولي ،ليست منتظمة ؟
4) هل كل عدد منتظم هو من الصورة $P.2^n$ حيث أن P أولي ؟