درس في كسور الوحدة

الكسور: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots$ تسمى كسور وحدة. "كسر وحدة" هو كسر بسطه 1 ومقامه عدد طبيعي أكبر من 1.

المعلم: هل صحيح أن كل كسر وحدة يساوي مجموع كسري وحدة؟

قال **سهيل**: نعم بالطبع، فإن "كل عدد يساوي مجموع نصفيه"، أي أن:

نصف العدد + نصف العدد = العدد

لذلك:

$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$

$\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ $\quad$ $\frac{1}{5}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$

$\frac{1}{6}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$ $\quad$ $\frac{1}{7}=\frac{1}{14}+\frac{1}{14}$

$\frac{1}{10}=\frac{1}{.....}+\frac{1}{.....}$ $\quad$ $\frac{1}{25}=\frac{1}{.....}+\frac{1}{.....}$

صحيح ما قاله سهيل.

وماذا مع السؤال: هل كل كسر وحدة يساوي مجموع كسري وحدة مختلفين؟

لاحظوا المساويات الآتية وتأكدوا من صحتها:

$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$

$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$

هل تلاحظون علاقة بين مقامات الكسور في كل مساواة؟

أجابت منال: مقام الكسر الأصغر يساوي حاصل ضرب مقامي الكسرين الآخرين.

أحسنت، قال المعلم. وسأل: **اعتمدوا على جواب منال وسجلوا كل كسر من الكسور الآتية كمجموع كَسري وحدة مختلفين:**

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{\ldots\ldots}+\frac{1}{\ldots\ldots}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{1}{\ldots\ldots}+\frac{1}{\ldots\ldots}$$
$$\frac{1}{7}=\frac{1}{\ldots\ldots}+\frac{1}{\ldots\ldots}$$
$$\frac{1}{8}=\frac{1}{\ldots\ldots}+\frac{1}{\ldots\ldots}$$
$$\frac{1}{9}=\frac{1}{\ldots\ldots}+\frac{1}{\ldots\ldots}$$
$$\frac{1}{10}=\frac{1}{\ldots\ldots}+\frac{1}{\ldots\ldots}$$

انتبهت نداء إلى أنّ الكسر $\frac{1}{4}$ يمكن أن نكتبه بطريقتين:

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$$

وانتبه إياد إلى أن:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$$

إياد: توجد ثلاث إمكانيات للتعبير عن $\frac{1}{6}$ كمجموع كسري وحدة مختلفين. (تأكد الطلاب من صحة جواب إياد).

منال: توجد إمكانيتان تشذان عن القاعدة التي ذكرتها.

نداء: القاعدة التي ذكرتها منال تعطينا إمكانية واحدة وهي طريقة سهلة. لكن كيف عرف إياد هاتين الإمكانيتين!

إياد: فقط جربت!

تدخل بلال وقال: انتبهوا إلى أنّ $\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$

بما أنّ: $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ فإنّ: $\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{4}+\frac{1}{12})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}$

لذلك: $\frac{1}{6}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$

بعد أن شرح بلال فكرته. انتبهت أماني إلى شيء آخر.

أماني: أليس $\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$؟

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{3}+\frac{1}{6})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$$

أي أنّ: $\frac{1}{6}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$

وهذه هي الإمكانية الثالثة التي ذكرها إياد.

المعلم: أحسنتم، وأحسنت أماني إذ انتبهت إلى قانون التبادل في الضرب. لقد وجد إياد ثلاث إمكانيات أليس من الممكن إيجاد إمكانية رابعة؟

قالت **رنا:** إذا استطعنا أن نجد طريقتين للكسر $\frac{1}{2}$ أو الكسر $\frac{1}{3}$ فإننا سنجد طريقة رابعة للكسر $\frac{1}{6}$. لكنني جربت ولم أجد.

رغد: هذا لا يكفي لأنها لم تجرب جميع الإمكانيات لأن عددها كبير جداً.

المعلم: كيف يقسم شخصان طعاماً فيما بينهما بحيث يرضى الاثنان كلٌّ بحصته؟

أمين: بالقرعة.

وسام: قد لا يرضى أحدهما لأنها مسألة حظ.

المعلم: أحدهما يقسم الطعام إلى قسمين. فحسب اعتقاده الحصتان متساويتان فهو يرضى بأيّ قسم منهما، والآخر يختار، فعليه أن يرضى بحصته لأن لا أحد يمنعه من اختيار الحصة الأفضل.

سؤال: عندما نقسم كمية (أو عدداً) إلى قسمين فماذا يحتمل؟

رنا: إذا كانت الكميتان مختلفتين فإن إحداهما أكبر من نصف الكمية والأخرى أقل من نصف الكمية.

المعلم: أحسنت. وما علاقة هذا بموضوعنا؟

أحمد: كتابة الكسر كمجموع كسري وحدة مختلفين هي أن نقسم الكسر إلى قسمين مختلفين أحدهما يكون أكبر من نصف الكسر والآخر أصغر من نصف الكسر.

المعلم: كم يساوي نصف الـ $\frac{1}{2}$؟

جواب: طبعاً $\frac{1}{4}$.

المعلم: ما هي كسور الوحدة التي هي أكبر من $\frac{1}{4}$؟ (جواب من بعض الطلاب: $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$)

تدخل أمين: ماذا تقولون هل $\frac{1}{5}$ أكبر من $\frac{1}{4}$؟!! كلما كبر المقام صغر الكسر. ألا تعلمون أن الحصة أكبر كلما قلّ عدد الأشخاص!

تردد الطلاب الذين عرفوا أنهم تسرعوا في إجابتهم، وقالوا إن الكسور التي ذكروها هي كسور أصغر من $\frac{1}{4}$.

المعلم: فما هي كسور الوحدة الأكبر من $\frac{1}{4}$؟

جواب الطلاب: $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$.

المعلم: عندما نكتب كسري وحدة مختلفين بحيث يكون مجموعهما $\frac{1}{2}$ ، فكم يجب أن يكون الكسر الأكبر بينهما؟

جواب: $\frac{1}{3}$ أوَ $\frac{1}{2}$.

ثم تراجع الطلاب عن جوابهم وقالوا: فقط $\frac{1}{3}$.

المعلم وكيف تجدون الكسر الأصغر؟

جواب: نحسب $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$. بما أنّ $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ ،

لذلك فإن الكسر الأصغر هو $\frac{1}{6}$ وهو أيضاً كسر وحدة.

لذلك $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ هي الإمكانية الوحيدة.

المعلم: جرّبوا بالنسبة للكسر $\frac{1}{3}$.

قال هيثم: نصف ألـ $\frac{1}{3}$ يساوي $\frac{1}{6}$. كسور الوحدة الأكبر من $\frac{1}{6}$ هي:

$\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{2}$.

ولكن الكسور التي يجب أن نفحصهما هي $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{5}$ لأن الكسر الأكبر يجب أن يكون أصغر من $\frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$$

الكسر $\frac{2}{15}$ ليس كسر وحدة. لذلك أيضاً في هذه الحالة توجد إمكانية واحدة وهي: $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$

لخص المعلم القاعدة

كسر الوحدة= كسر وحدة أكبر من نصفه + كسر وحدة أصغر من نصفه

"كسر الوحدة الأكبر" يجب أن يكون أصغر من الكسر المعطى وأكبر من نصفه. حتى نجد "كسر الوحدة الأصغر" نحسب الفرق بين كسر الوحدة المعطى "وكسر الوحدة الأكبر"

طلب المعلم من الطلاب أن يجدوا جميع الإمكانيات للتعبير عن كسور الوحدة الآتية كمجموع كسري وحدة:

$$\frac{1}{11}\ ,\ \frac{1}{7}\ ,\ \frac{1}{15}\ ,\ \frac{1}{14}\ ,\ \frac{1}{12}\ ,\ \frac{1}{10}\ ,\ \frac{1}{9}\ ,\ \frac{1}{8}$$

المعلم: لاحظوا:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$$

أحمد: يمكننا أن نجد ثلاثة كسور وحدة مختلفة مجموعها يساوي $\frac{1}{2}$. ويمكننا إيجاد أربعة كسور وحدة مختلفة مجموعها يساوي $\frac{1}{2}$. يمكننا أن نجد الكثير من كسور الوحدة المختلفة التي مجموعها $\frac{1}{2}$.

تمارين

1. جد كسري وحدة مختلفين مجموعهما $\frac{1}{20}$. جد جميع الإمكانيات.
2. جد ثلاثة كسور وحدة مختلفة مجموعها $\frac{1}{3}$.
3. جد ثلاثة كسور وحدة مختلفة مجموعها $\frac{1}{4}$.
4. جد أربعة كسور وحدة مختلفة مجموعها $\frac{1}{7}$.
5. جد خمسة كسور وحدة مختلفة مجموعها $\frac{1}{10}$.

انتبه أشرف إلى أنّ:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times3}$$
$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}=\frac{1}{3\times4}$$
$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}=\frac{1}{4\times5}$$

نزار: إني أستطيع بسهولة أن أحسب المجموع الآتي:

$$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+....+\frac{1}{99\times100}$$

بسرعة فائقة. كيف؟ **سأل أحمد.**

نزار: إن الجواب يساوي $\frac{49}{100}$، حسب الملاحظة التي ذكرتها.

المعلم: أحسنت يا نزار. هيا اكتشفوا طريقة نزار!

واحسبوا:

$$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+....+\frac{1}{49\times50}=?$$

$$\frac{1}{10\times11}+\frac{1}{11\times12}+\frac{1}{12\times13}+....+\frac{1}{99\times100}=?$$

$$\frac{1}{9\times10}+\frac{1}{10\times11}+\frac{1}{11\times12}+\frac{1}{12\times13}+....+\frac{1}{99\times100}=?$$

$$\frac{1}{20\times21}+\frac{1}{21\times22}+\frac{1}{22\times23}+\frac{1}{23\times24}+.....+\frac{1}{101\times102}=?$$

$$\frac{1}{20\times21}+\frac{1}{21\times22}+\frac{1}{22\times23}+\frac{1}{23\times24}+.....+\frac{1}{199\times200}=?$$

إجابات لأوّل ثلاثة فروع: $\frac{91}{900}$, **0.09** , **0.48**

(إرشاد: انتبه إلى أنّ كل كسر في المجموع يساوي الفرق بين كسرين)

قالت سارة: حاصل ضرب كسري وحدة يساوي فرقهما هذا إذا كان المقامان متتاليين، لكن هذا غير صحيح عندما لا يكون المقامان متتاليين. مثلاً: $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$ وهو لا يساوي حاصل ضرب الكسرين لأنّ: $\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$. لكني أرى أنّ: حاصل ضرب الكسرين $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{5}$ يساوي نصف فرقهما.

قالت مريم: صحيح ما قالته سارة. فإنّي وجدت أنّ $\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$ وكذلك فإنّ:

$$\frac{1}{7}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)$$
$$\frac{1}{9}\times\frac{1}{11}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)$$

قال رغد: عندما يكون الفرق بين المقامين 2 فإنّ حاصل ضرب الكسرين يساوي نصف فرقهما. ألاحظ أيضاً أنّ:

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$$
$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)$$

قال مجد: لقد حسبت ووجدت أنّ :

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$$
$$\frac{1}{5}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)$$
$$\frac{1}{7}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)$$

فإذا كان الفرق بين مقامي الكسرين 3 فإنّ حاصل ضربهما يساوي ثُلُث فرقهما.

قال نور: هيا نحسب بالاعتماد على اكتشافاتكم :

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{49\times51}=?$$ (لاحظوا أنّ المجموع مكوّن من 49 كسراً).

$$\frac{1}{11\times13}+\frac{1}{13\times15}+\frac{1}{15\times17}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{99\times101}=?$$

$$\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\frac{1}{10\times13}\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{61\times64}=?$$

قال جواد: أتحداكم أن تتمكنوا من حساب المجموع :

$$\frac{1}{1\times8}+\frac{1}{8\times15}+\frac{1}{15\times22}+\frac{1}{22\times29}\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{141\times148}=?$$