متواليات أعداد أولية

بقلم د. عــلي عثـــمان

(1) هل توجد ثلاثة أعداد أولية بحيث أنهاّ تكوّن متوالية حسابية فرقها 2 ؟ علـل. (كم حلاً يوجد ؟)

حل: واضح أنّ الأعداد 3، 5، 7 هي ثلاثة أعداد أولية تحقق الشرط. والسؤال الآن: هل يوجد غيرها؟

الجواب: كلا لايوجد غيرها. والتعليل هو الآتي: لو بدأنا بعدد أولي أكبر من 3 فهو إمّا ينقسم على 3 والباقي 1 وإمّا ينقسم على 3 والباقي 2. إذا كان العدد الذي نبدأ به ينقسم على 3 والباقي 1 فإنّ العدد الذي يزيد عنه بـ 2 ينقسم على 3 بدون باقٍ فهو عدد مؤلّف . لذلك لا توجد ثلاثة أعداد أولية بحيث أنهاّ تكوّن متوالية حسابية فرقها 2 وحدّها الأصغر ينقسم على 3 والباقي1.

إذا كان العدد الذي نبدأ به ينقسم على 3 والباقي 2 فإنّ العدد الذي يزيد عنه بـ 2 ينقسم على 3 والباقي 1 والعدد الثالث ينقسم على 3 بدون باقٍ فهو عدد مؤلّف.

لذلك لا توجد ثلاثة أعداد أولية بحيث أنهاّ تكوّن متوالية حسابية فرقها 2 وحدّها الأصغر ينقسم على 3 والباقي2. من هذا التعليل ينتج أن الامكانية الوحيدة هي 3، 5، 7.

(2) هل توجد أربعة أعداد أولية بحيث أنهاّ تكوّن متوالية حسابية فرقها 2؟ علل.

جواب: كلا .

تعليل: المتوالية لحسابية الوحيدة التي فرقها 2 والتي حدودها الثلاثة الأولى أولية هي 3، 5، 7 والحد الرابع في المتوالية هو 9 وبما أنّه ليس أولياً فلا توجد أربعة أعداد تلبي شروط المسألة.

(3) **هل توجد ثلاثة أعداد أولية بحيث أنهاّ تكوّن متوالية حسابية فرقها 4 ؟ علل. (كم حلاً يوجد ؟).**

جواب: 3، 7، 11 تحقق الشروط. نبيّن الآن عدم وجود إمكانية أخرى. لو بدأنا بعدد ينقسم على 3 والباقي 1 فإن العدد الثاني ينقسم على 3 والباقي 2 والعدد الثالث ينقسم على 3 بدون باقٍ فهو ليس أوليًا (مؤلّف). و لو بدأنا بعدد ينقسم على 3 والباقي 2 فإن العدد الثاني ينقسم على 3 بدون باقٍ فهو ليس أوليًا (مؤلّف).

(4) **هل توجد ثلاثة أعداد أولية بحيث أنهاّ تكوّن متوالية حسابية فرقها 8 ؟ علل. (كم حلاً يوجد ؟).**

جواب: الأعداد 3، 11، 19 تحقق الشروط ولا يوجد غيرها . التعليل مشابه للتعليلات السابقة.

(5) **هل ت وجد ثلاثة أعداد أولية بحيث أنهاّ تكوّن متوالية حسابية فرقها 6 ؟ علل. (اكتب 4 إمكانيات منها).**

جواب:

أ. 5، 11، 17 ب. 11، 17، 23

ج. 17، 23، 29 د. 7، 13، 19

هـ. 31، 37، 43

(6) **هل توجد خمسة أعداد أولية بحيث أنها تشكّل متوالية حسابية فرقها 6 ؟ (كم حلًا يوجد؟).**

جواب: 5، 11، 17، 23، 29 تحقق الشروط. نبيّن الآن أنه لا يوجد حل آخر. لو بدأنا بعدد ينقسم على 5 والباقي 1 فإنّ الحد الخامس ينقسم على 5 فهو مؤلف (نجمع له 24 فيكون المجموع من مضاعفات 5)، ولو بدأنا بعدد ينقسم على 5 والباقي 2 فإنّ الحد الرابع ينقسم على 5 فهو مؤلف،

ولو بدأنا بعدد ينقسم على 5 والباقي 3 فإنّ الحد الثالث ينقسم على 5 فهو مؤلف، ولو بدأنا بعدد ينقسم على 5 والباقي 4 فإنّ الحد الثاني ينقسم على 5 فهو مؤلف.

(7) هل توجد ثلاثة أعداد أولية بحيث أنهاّ تكوّن متوالية حسابية فرقها عدد فردي ؟ علل. (كم حلاً يوجد ؟).

جواب: لو بدأنا بالعدد 2 فيكون الثاني فردياً والثالث زوجياَ فهو ليس أولياَ. ولو بدأنا بعدد فردي فيكون الثاني زوجياَ فهو ليس أولياَ. فالجواب سلبي.

(8) هل توجد ثلاثة أعداد أولية بحيث أنهاّ تكوّن متوالية حسابية فرقها 10 ؟ علل. (كم حلاً يوجد ؟).

جواب: 3، 13، 23. لا يوجد حل آخر . علل.

(9) هل توجد أربعة أعداد أولية بحيث أنهاّ تكوّن متوالية حسابية فرقها 10 ؟ علل. (كم حلاً يوجد ؟).

جواب: كلا.

التعليل: لو وُجِدَت أربعة أعداد كهذه لكان للسؤال السابق حلان.

(10) **متوالية** حسابية فرقها 12 وجميع حدودها أولية. كم عدد حدود المتوالية على الأكثر؟ علل!

جواب: عندما نبدأ بالعدد 5 نحصل على المتوالية: 5، 17، 29، 41، 53 وعدد حدودها 5 (انتبه الحد القادم 65 ليس أولياً). عندما نبدأ بعدد ينقسم على 5 والباقي 1 فإنّ الحد الثالث يكون من مضاعفات 5، فعدد الحدود الأولية أقل من 3. وعندما نبدأ بعدد ينقسم على 5 والباقي 2 فإنّ الحد الخامس يكون من مضاعفات 5، فعدد الحدود الأولية أقل من 5. وعندما نبدأ بعدد ينقسم على 5 والباقي 3 فإنّ الحد الثاني يكون من مضاعفات 5، فعدد الحدود الأولية أقل من 2. وعندما نبدأ بعدد ينقسم على 5 والباقي 4 فإنّ الحد الرابع يكون من مضاعفات 5، فعدد الحدود الأولية أقل من 5.

لذلك فإنّ عدد حدود المتوالية على الأكثر 5 .

(11) متوالية حسابية فرقها 30 وجميع حدودها أولية. كم عدد حدود المتوالية على الأكثر؟ علل!

جواب: العدد 30 ينقسم بدون باقٍ على 2 و3 و5 . لذلك أصغر عدد أولي يمكن أن نبدأ منه هو 7 . نسجّل حدود المتوالية:

7، 37، 67، 97، 127، 157 . الحد القادم هو 187 وهو عدد مؤلّف (ينقسم على 11 و17). عدد حدود المتوالية هو 6.

هل توجد متوالية أخرى ذات عدد حدود أكبر وتحقق الشروط؟

ننتبه إلى أن العدد 30 ينقسم على 7 والباقي 2 . لو بدأنا بعدد ينقسم على 7 مع باقٍ 1 فإنّ الحد الرابع حتماً سينقسم على 7 بدون باقٍ (لأنّ الحد الرابع يساوي (الحد الأول +90) فهو يساوي (عدد من مضاعفات 7)+91، لكن 91 هو أيضًا من مضاعفات 7). فيكون عدد حدود المتوالية على الأكثر 3. ولو بدأنا بعدد ينقسم على 7 مع باقٍ 2 فإنّ الحد السابع حتماً سينقسم على 7 بدون باقٍ (لأنّ الحد السابع يساوي (الحد الأول +180)، فهو يساوي (عدد من مضاعفات 7) +182، لكن 182 هو أيضًا من مضاعفات 7). فيكون عدد حدود المتوالية على الأكثر 6 (مثلاً: 107، 137، 167، 197، 227، 257). ولو بدأنا بعدد ينقسم على 7 مع باقٍ 3 فإنّ الحد الثالث حتماً سينقسم على 7 بدون باقٍ (لأنّ الحد الثالث يساوي (الحد الأول +60)، فهو يساوي (عدد من مضاعفات 7) +63، لكن 63 هو أيضًا من مضاعفات 7). فيكون عدد حدود المتوالية على الأكثر 2. ولو بدأنا بعدد ينقسم على 7 مع باقٍ 4 فإنّ الحد السادس حتماً سينقسم على 7 بدون باقٍ (لأنّ الحد السادس يساوي (الحد الأول +150)، فهو يساوي (عدد من مضاعفات 7) +154، لكن 154 هو أيضًا من مضاعفات 7). فيكون عدد حدود المتوالية على الأكثر 5. ولو بدأنا بعدد ينقسم على 7 مع باقٍ 5 فإنّ الحد الثاني ينقسم على 7 بدون باقٍ . ولو بدأنا بعدد ينقسم على 7 مع باقٍ 6 فإنّ الحد الخامس حتماً سينقسم على 7 بدون باقٍ (لأنّ الحد الخامس يساوي (الحد الأول +120)، فهو يساوي (عدد من مضاعفات 7) +126، لكن 126 هو أيضًا من مضاعفات 7). فيكون عدد حدود المتوالية على الأكثر 4. في جميع الحالات تبين لنا أن عدد حدود متوالية حسابية فرقها 30 وجميع حدودها أولية هو على الأكثر 6 .

السؤال الذي يطرح نفسه هو: عندما نريد إيجاد متوالية حسابية جميع حدودها أعداد أولية فهل توجد علاقة بين فرق المتوالية وعدد حدود المتوالية؟

عندما نستعرض الأمثلة السابقة نستطيع أن نستخلص النظرية الآتية:

نظرية:
إذا كانت $a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_j$ متوالية حسابية ذات فرق d (الثابت) وجميع حدودها أعداد أولية وإذا كان p_0
أصغر عدد أولي لا يُقَسِم d فإنّ عدد حدود المتوالية أصغر أو يساوي p_0 (أي أنّ $j \le p_0$).

برهان: ننظر في المتوالية الحسابية:

$$p_0 \ , p_0\text{+d} \ , p_0\text{+2d} \ , p_0\text{+3d},....... \ , p_0+\left(p_0-1\right)\text{d}, p_0\text{+}p_0\text{d}$$

الحدّ $p_0\text{+}p_0\text{d}$ ليس أوليًا.

فإمّا أن تكون جميع حدود المتوالية $p_0 \ , p_0\text{+d} \ , p_0\text{+2d} \ , p_0\text{+3d},....... \ , p_0+\left(p_0-1\right)\text{d}$

أولية أو ليست جميعها أولية. في الحالتين، يكون عدد حدود المتوالية الحسابية التي تبدأ بـ - p_0 أصغر أو يساوي p_0 .

نفرض الآن أنّ $d = mp_0 + r$ حيث أنّ $0 < r < p_0$ و n $\ge$ 0 r صحيحان ونفرض أيضًا أن $a_1 = kp_0 + t$، حيث أنّ $0 < t < p_0$ و $\ge$ 0 t صحيحان.

نعود للمتوالية $a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_j$، فإنّ لكل $j \ge i \ge 1$ يتحقق أنّ:

$a_i = kp_0 + t + \left(mp_0 + r\right)\left(i-1\right) = \left(k + m\left(i-1\right)\right)p_0 + \left(i-1\right)r + t$. ننظر إلى بواقي قسمة أوّل p_0 حدود من حدود المتوالية $a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_j$. فهي تساوي بواقي قسمة الأعداد

$$t \ , r+t \ , 2r+t \ , 3r+t \ , ... \ , \left(p_0-1\right)r+t$$

على p_0 وهي جميعها مختلفة، لأنّ الفرق بين أي حدين منها هو من الصورة lr، وبالتأكيد فإنّ باقي قسمته على p_0 ليس صفرًا. بما أن عدد الحدود هو p_0 فعدد بواقي قسمتها على p_0 هو أيضًا p_0 لأنها مختلفة. لذلك فمن المؤكّد أن أحدها صفر. هذا يعني أن أحد حدود المتوالية $a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_{p_0}$ ينقسم على p_0 بدون باقٍ فهو ليس أوليًا. لذلك فإنّ عدد حدود المتوالية، حتى تكون حدودها جميعًا أولية، أصغر من p_0 . بهذا تمّ برهان النظرية.

أمثلة

أ. جد متوالية حسابية جميع حدودها أولية وفرقها 16.

حل: أصغر عدد أولي لا يُقسَم 16 هو 3. لذلك فإن وُجدَت متوالية من هذا القبيل فإن عدد حدودها على الأكثر 3.

3، 19، 35 . لكن 35 مؤلف. لذلك المتوالية من حدين وهما 3، 19. لو بدأنا بعدد غير 3 فإن عدد حدود المتوالية أصغر من 3.

ب. جد متوالية حسابية جميع حدودها أولية وفرقها 18.

حل: أصغر عدد أولي لا يُقسَم 18 هو 5. لذلك فإن وُجدَت متوالية من هذا القبيل فإن عدد حدودها على الأكثر 5.

نحاول: 5، 23، 41، 59، 77 . لكن 77 ليس أوليًا . لذلك فالمتوالية 5، 23، 41، 59 تحقق المطلوب وعدد حدودها 4 . لو بدأنا بعدد أولي غير 5 فإن عدد حدود المتوالية بالتأكيد أصغر من 5. مثلًا 11، 29، 37 . نراقب الحالات العامّة الآتية:

$5n+1$, $5n+19$, $5n+37$, $5n+55$ الحد الرابع مؤلّف

$5n+2$, $5n+20$ الحد الثاني مؤلّف

$5n+3$, $5n+21$, $5n+39$, $5n+57$, $5n+75$ الحد الخامس مؤلّف . (مثلًا: 43 , 61 , 79 , 97).

$5n+4$, $5n+22$, $5n+40$ الحد الثالث مؤلّف .

ج. جد متوالية حسابية جميع حدودها أولية وفرقها 210.

حل: أصغر عدد أولي لا يُقسَم 210 هو العدد 11. لو بدأنا بالعدد 11 فالعدد التالي هو 221 وهو مؤلّف (يقسم على 17).

نبدأ بالعدد 13 فنحصل على المتوالية: 13، 223، 433، 643، 853، 1063، العدد التالي 1273 هو عدد مؤلّف (ينقسم على 19).