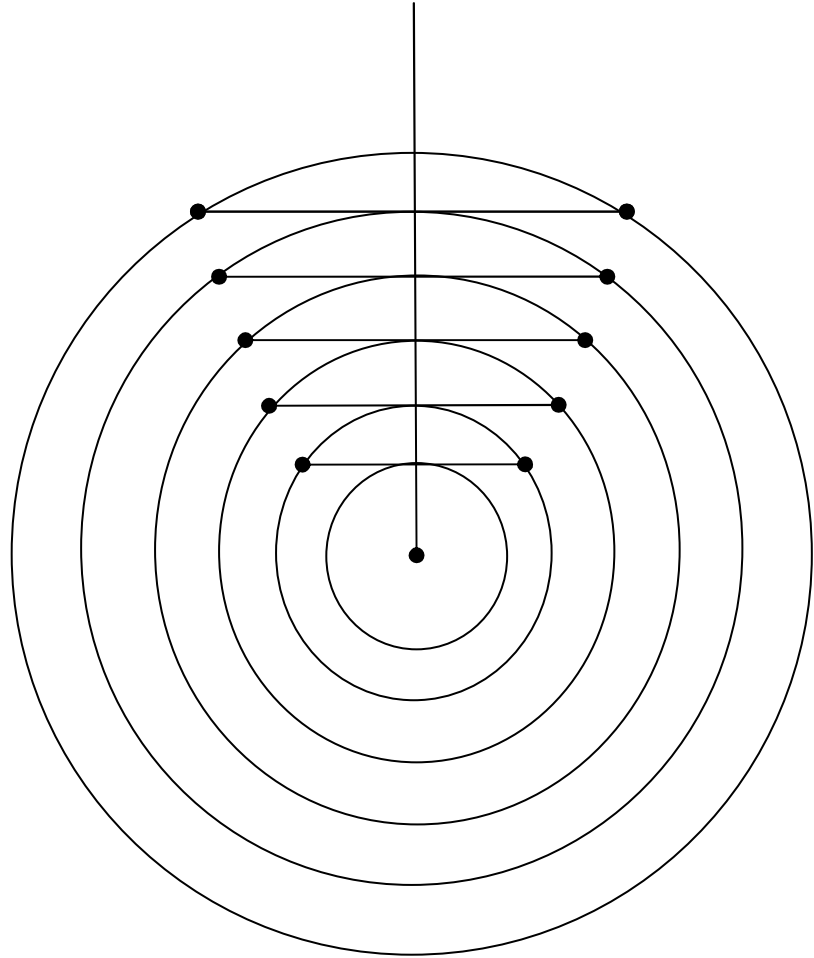


## 1. مسألة في الهندسة التحليلية

في هيئة المحاور  $XY$  نرسم دائرة  $C_0$  مركزها في النقطة  $(0,0)$  ونصف قطرها  $r_0$ .  
نرسم متوالية من الدوائر  $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots$  ، أنصاف أقطارها على  
التناظر هي  $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$  بحيث أن لجميع الدوائر نفس المركز  $(0,0)$  ،  
ونصف قطر كل دائرة يزيد عن نصف قطر الدائرة التي تسبقها بـ  $t$  ( ثابت موجب).  
أي أن لكل  $k$  طبيعي يتحقق  $r_k = r_{k-1} + t$ . لكل  $k$  طبيعي نرسم مماس  
الدائرة  $C_k$  من النقطة  $(0, r_k)$  ، هذا المماس يقطع الدائرة  $C_{k+1}$  في نقطتين، نرسم  
للنقطة اليمنى  $A_k$  وللنقطة اليسرى  $B_k$ . برهن أن النقاط  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$  و  
 $B_1, B_2, B_3, B_4, \dots$  تقع على قطع مكافئ (الرسم البياني لدالة  
تربيعية).



## 2. مضلع متساوي الزوايا ومضلع متساوي الأضلاع

مضلع منتظم هو مضلع جميع زواياه متساوية وجميع أضلاعه متساوية.

بالنسبة للمثلث وهو أبسط المضلعات فإن المثلث المنتظم هو المثلث متساوي الأضلاع. نعرف أن تساوي الأضلاع في المثلث يؤدي إلى تساوي الزوايا والعكس صحيح فإن تساوي زوايا المثلث يؤدي إلى تساوي الأضلاع.

نستطيع أن نقول بالنسبة للمثلث: **المثلث المنتظم هو المثلث الذي جميع أضلاعه متساوية.**

أو المثلث المنتظم هو المثلث الذي جميع زواياه متساوية. في الحالتين يكون المثلث هو المثلث متساوي الأضلاع (والذي كما نعلم كل زاوية من زواياه تساوي  $60^\circ$ ). هذا الأمر لا ينطبق على سائر المضلعات.

**تساؤل 1:** هل كل شكل رباعي (مضلع رباعي) إذا تساوت جميع أضلاعه فهو منتظم؟

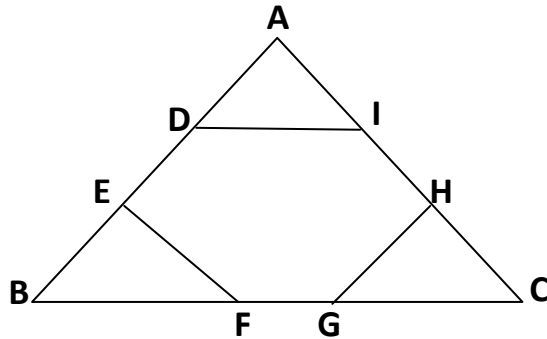
**تساؤل 2:** هل كل شكل رباعي إذا تساوت جميع زواياه فهو منتظم؟

جوابا هذين التساؤلين سلبيان. الشكل الرباعي المنتظم هو الذي جميع أضلاعه متساوية وكذلك جميع زواياه قوائم (لأن جميع زواياه متساوية ومجموعها  $360^\circ$ ). توجد أشكال رباعية أضلاع كل منها متساوية ولكن ليست منتظمة وهي المعينات (باستثناء المربعات منها). توجد أشكال رباعية زوايا كل منها متساوية (جميعها زوايا قائمة) وهي ليست منتظمة وهذه الأشكال هي المستطيلات (باستثناء المربعات منها).

**مسألة:** كيف يتم إنشاء مسدس غير منتظم بحيث أن جميع أضلاعه متساوية؟

نرسم مثلثا ABC ونفرض أن أطوال أضلاعه المقابلة للرؤوس A,B,C هي على التناظر a,b,c. عندما نقطع من زوايا المثلث مثلثات بواسطة خطوط موازية لأضلاع المثلث، كما ترى في الشكل (1)، فإننا نحصل على مضلع سداسي

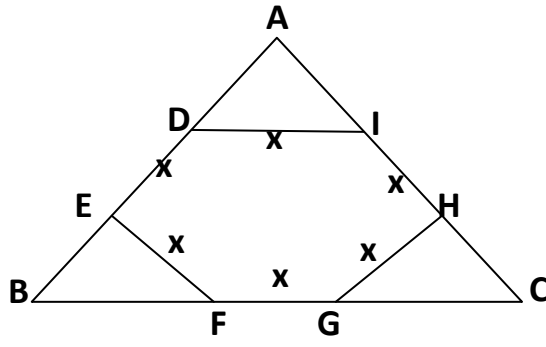
(مسدس)



عندما لا يكون المثلث ABC مثلثاً متساوي الأضلاع فإن المسدس DIHGFE غير منتظم لأن زواياه مكملة لزوايا المثلث ABC فهي ليست جميعها متساوية. أما الآن فيسأل السؤال: كيف

نمرر المستقيمات الموازية لأضلاع المثلث لينشأ مسدس جميع أضلاعه متساوية؟

نفرض أن طول ضلع المسدس x. نتذكر أن:  $EF \parallel AC, DI \parallel BC, GH \parallel AB$



حسب نظرية طاليس فان:

$$AD = \frac{cx}{a} \Leftrightarrow \frac{AD}{c} = \frac{x}{a} \text{ أي أن } \frac{AD}{AB} = \frac{DI}{BC}$$

كذلك فان:

$$BE = \frac{cx}{b} \Leftrightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{EF}{AC}$$

لكن:  $AD + DE + EB = AB$  لذلك:

$$\frac{cx}{a} + x + \frac{cx}{b} = c$$

لذلك:

$$bcx + abx + acx = abc$$

$$\Leftrightarrow x(bc + ab + ac) = abc$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{abc}{bc + ab + ac}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

أي أن  $x$  يساوي مقلوب مجموع مقلوبات أضلاع المثلث. بما أن الجواب لا يتأثر عند تغيير الترتيب فهذا يعني أننا نحصل على نفس النتيجة لو بدأنا بالضلع  $EF$  أو الضلع  $GH$ .

من الضروري أن نعلم كيف نحدد النقاط  $D, E, F, G, H, I$ .

$$AD = \frac{bc^2}{ab + bc + ac} \text{ لذلك: } AD = \frac{cx}{a} \text{ فان: } \frac{AD}{c} = \frac{x}{a}$$

$$BE = \frac{ac^2}{ab + bc + ac} \text{ وبشكل مماثل نستنتج أن:}$$

$$AD : DE : EB = bc^2 : abc : ac^2 \text{ لذلك فان}$$

$$= bc : ab : ac$$

أي أن النقاط  $D$  و  $E$  تقسم  $AB$  إلى ثلاثة أجزاء بحيث أن  $AD : BE : EB = bc : ab : ac$

وبشكل مماثل نستنتج أن F و G تقسم BC إلى ثلاثة أجزاء بحيث أن:

$$BF : FG : GC = ac : cb : ba$$

و H و I تقسم CA إلى ثلاثة أجزاء بحيث أن  $AI : IH : HC = cb : ac : ab$

سؤال: كم هي النسبة بين مساحة المسدس DEFGHI ومساحة المثلث ABC؟

حل: نفرض أن  $M =$  مساحة المثلث ABC. من التشابه فان:

$$\frac{S(ADI)}{M} = \left(\frac{x}{a}\right)^2$$

$$\frac{S(BEF)}{M} = \left(\frac{x}{b}\right)^2$$

$$\frac{S(CHG)}{M} = \left(\frac{x}{c}\right)^2$$

أي أن مجموع مساحات المثلثات المقطعة من المثلث الأصلي يساوي:

$$\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{c}\right)^2\right) \cdot M$$

لذلك فان مساحة المسدس =

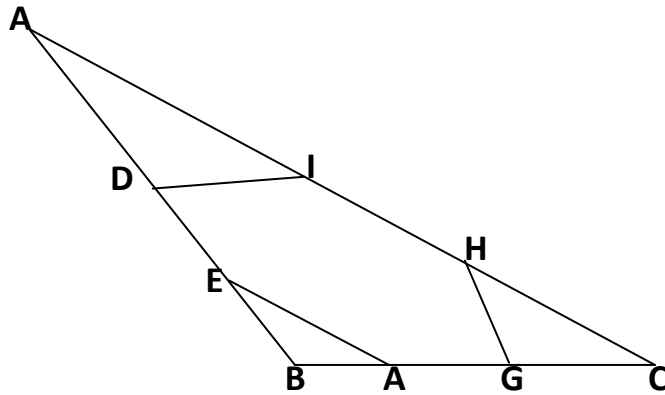
$$M \left(1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2}\right)\right)$$

$$= M \cdot \left(1 - x^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\right)$$

$$= M \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\right)$$

$$\frac{\text{مساحة المسدس}}{\text{مساحة المثلث}} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

مثال: نفرض أن أطوال أضلاع المثلث ABC هي:  $a = 9, c = 12, b = 18$



نعين النقطتين D و E على AB بحيث أن:

$$AD : DE : EB = 216 : 162 : 108$$

$$AD = \frac{216}{486} \cdot 12 = 5\frac{1}{3}$$

$$DE = \frac{162}{486} \cdot 12 = 4$$

$$EB = \frac{108}{486} \cdot 12 = 2\frac{2}{3}$$

نعين النقطتين F و G على BC بحيث أن:  $BF : FG : GC = 108 : 216 : 162$   
لذلك:

$$FG = \frac{216}{486} \cdot 9 = 4$$

$$BF = \frac{108}{486} \cdot 9 = 2$$

$$CG = \frac{162}{486} \cdot 9 = 3$$

نعين النقطتين H و I على AC بحيث أن:  $AI : IH : HC = 216 : 108 : 162$   
لذلك:

$$AI = \frac{216}{486} \cdot 18 = 8$$

$$IH = \frac{108}{486} \cdot 18 = 4$$

$$HC = \frac{162}{486} \cdot 18 = 6$$

$$\frac{1}{\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18}} = \frac{1}{\frac{8+6+4}{72}} = \frac{72}{18} = 4 = \text{طول ضلع المسدس}$$

$$\frac{\text{مساحة المسدس}}{\text{مساحة المثلث}} = 1 - \frac{\frac{1}{9^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{18^2}}{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18}\right)^2}$$

$$= 1 - \frac{\frac{29}{36^2}}{\frac{1}{4^2}} = 1 - \frac{29}{81} = \frac{52}{81}$$

لو أردنا أيضا حساب مساحة المسدس فنستعين بقانون هيرون لحساب مساحة المثلث. مساحة المثلث ABC حسب قانون هيرون =

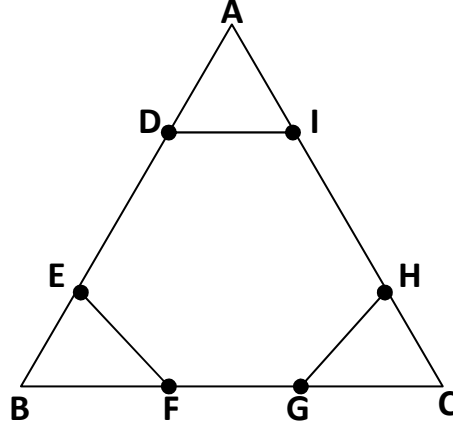
$$\sqrt{\frac{39}{2} \cdot \left(\frac{39}{2} - 9\right) \left(\frac{39}{2} - 12\right) \left(\frac{39}{2} - 18\right)} = \frac{1}{4} \sqrt{39 \cdot 21 \cdot 15 \cdot 3}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{13 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3^4} = \frac{9}{4} \sqrt{455}$$

$$\text{مساحة المسدس} = \frac{52}{81} \cdot \frac{9}{4} \sqrt{455} = \frac{13}{9} \cdot \sqrt{455}$$

**مسألة: كيف يتم إنشاء مسدس جميع زواياه متساوية وهو غير منتظم؟**

لو فرضنا أن جميع زوايا المسدس متساوية فإن كل واحدة منها تساوي  $120^\circ$  (لماذا؟) والزاوية المكملة لكل منها  $60^\circ$ . عندما نمد أضلاع مسدس كهذا فإنه حتما سيتكون مثلث متساوي الأضلاع. هذه الفكرة تساعدنا على إنشاء مسدس غير منتظم جميع زواياه متساوية.

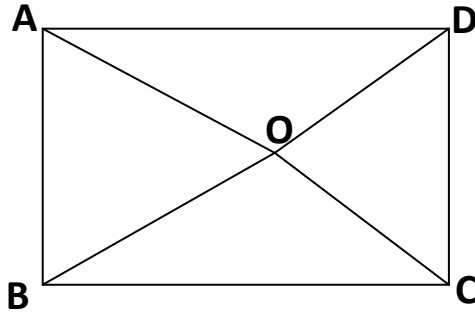


نرسم مثلثا متساوي الأضلاع، نعين نقاطا على الأضلاع بحيث أن  $AD$  اصغر من ثلث  $AB$  و  $E$  بين  $B$  و  $D$ . من  $D$  نرسم موازيا ل  $BC$  ومن  $E$  نرسم موازيا ل  $AC$ . نختار  $G$  بين  $C$  و  $F$  ونرسم منها موازيا ل  $AB$ . هكذا نتج المضلع السداسي  $DEFGHI$ . لاحظ أن المثلثات المقطعة جميعها متساوية الأضلاع لذلك  $AD=DI$  و  $BE=EF$ .

بما أن  $AD < \frac{1}{3}AB$  لذلك فإن  $ED$  أو  $EF$  احدهما أو كلاهما اكبر من  $\frac{1}{3}AB$  أو يساويه، لذلك فإن أضلاع المسدس ليست جميعها متساوية بالرغم من أن جميع زواياه متساوية (كل منها  $120^\circ$ ).

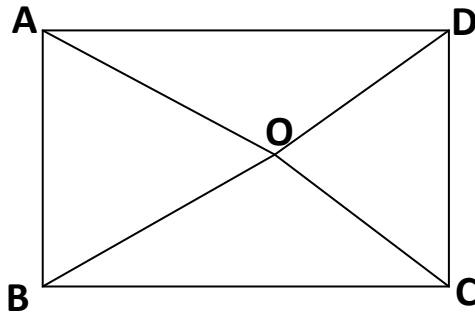
### 3. مسائل تقسيم هندسية

1. معطى المستطيل  $ABCD$ .



اشرح كيف نعين النقطة O داخل المستطيل بحيث أن المستقيمت الواصلة بين O ورؤوس المستطيل تقسم المستطيل إلى أربعة مثلثات مساحاتها على التوالي  $S_1, S_2, S_3, S_4$  بحيث أن  $S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = 3 : 2 : 6 : 7$  ؟

2. معطى المستطيل ABCD.



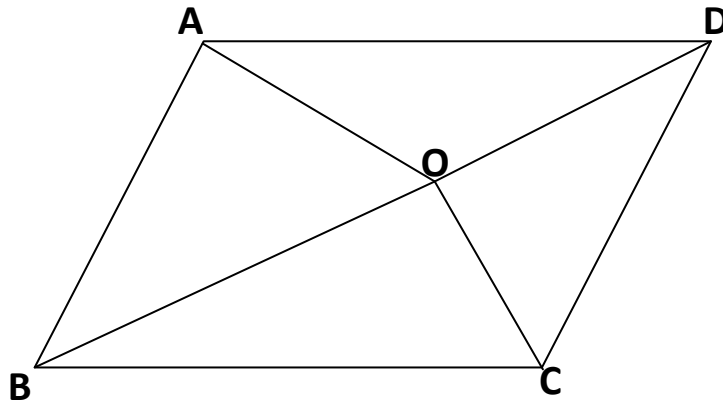
اشرح كيف نعين النقطة O داخل المستطيل بحيث أن المستقيمت الواصلة بين O ورؤوس المستطيل تقسم المستطيل إلى أربعة مثلثات مساحاتها على التوالي  $S_1, S_2, S_3, S_4$  بحيث أن :

أ.  $S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = 5 : 3 : 2 : 4$  ؟

ب.  $S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = 4 : 3 : 5 : 4$  ؟

ج.  $S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = 3 : 2 : 4 : 6$  ؟

3. معطى متوازي الأضلاع ABCD.



اشرح كيف نعين النقطة O داخل متوازي أضلاع بحيث أن المستقيمت الواصلة بين O ورؤوس متوازي أضلاع تقسم متوازي أضلاع إلى أربعة مثلثات مساحاتها على التوالي  $S_1, S_2, S_3, S_4$  بحيث أن :

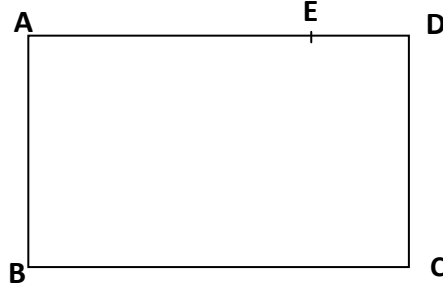
أ.  $S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = 3 : 2 : 6 : 7$  ؟

ب.  $S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = 5 : 3 : 2 : 4$  ؟

ج.  $S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = 4 : 3 : 5 : 4$  ؟

د.  $S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = 3 : 2 : 4 : 6$  ؟

4. معطى المستطيل ABCD معطى نقطة E على الضلع AD عيّن نقطة L على BC بحيث أن EL يقسم المستطيل إلى قسمين متساويين بالمساحة.



5. معطى المستطيل ABCD معطى نقطة E على الضلع AD بحيث أن  $ED = 3 \text{ cm}$ . معلوم أن  $AD = 10 \text{ cm}$  و  $AB = 6 \text{ cm}$ . اشرح كيف تعيّن نقطة J على BC بحيث أن EJ يقسم المستطيل إلى قسمين النسبة بين الجزء الأيسر إلى الأيمن:

أ. تساوي 1:1.

ب. تساوي 2:1.

ج. تساوي 3:1.

د. تساوي 4:1.

هـ. تساوي 3:2.

و. تساوي 2:3.

ز. تساوي 1:3.

ح. تساوي 1:5.