مهارات حل مسائل/ د. علي عثمان

المسألة الأولى:

لاحظ أنّ العددين 13 وَ31 هما عددان أحدهما "معكوس" الآخر. (نقصد بمعكوس عدد هو العدد الناتج عند كتابة أرقام العدد بشكل معكوس. مثلاً معكوس 15 هو 51، ومعكوس العدد 123 هو 321). نلاحظ أنّ $169 = 13^2$ و $961 = 31^2$. العددان 169 وَ 961 كل منهما معكوس الآخر. أيّ أن مُرَبّع العدد 13 يساوي معكوس مربّع معكوسه. هذه الصفة ليست عامّة. فمثلاً $625 = 25^2$ وَ $2704 = 52^2$ العدد 2704 لا يساوي معكوس العدد 625.

هل توجد أعداد أُخرى، مؤلّفة من رقمين، تحقق الصفة التي يحققها العدد 13 ؟ جد جميع الأعداد. من أجل حلّ المسألة نذكر عدّة ملاحظات:

أ. إذا كان x عدداً مؤلفاً من رقمين، فإن كان $10 \le x \le 31$ فإنّ x^2 هو عدد مؤلّف من ثلاثة أرقام، وإن كان $32 \le x \le 99$ فإنّ x^2 مؤلّف من 4 أرقام.

ب. إذا كان x عدداً مؤلفاً من ثلاثة أرقام فإنّ الفرق بينه وبين معكوسه هو عدد من مضاعفات 99.
فلو كان $x = \overline{ABC}$ فإنّ معكوس x هو $\overline{CBA}$ والفرق بينهما=

$$\begin{aligned}\overline{ABC} - \overline{CBA} &= 100A + 10B + C - 100C - 10B - A \\ &= 99(A - C)\end{aligned}$$

ج. بالنسبة لعدد مؤلّف من 4 أرقام:

$$\overline{ABCD} - \overline{DCBA} = 999(A - D) + 90(B - C)$$

ويمكن أن نكتبها بشكل آخر:

$$\begin{aligned}&990(A - D) + 99(B - C) + 9(A - D) - 9(B - C) \\ &= 99[10(A - D) + (B - C)] + 9(A - D - B + C) \\ &= 99[10(A - D) + (B - C)] - 9(D - C + B - A)\end{aligned}$$

يقبل هذا العدد القسمة على 99 إذا وفقط إذا كان العدد $D - C + B - A$ يقبل القسمة على 11 وهذا كافئ قبول العدد $ABCD$ القسمة على 11 . (أنظر: قابلية القسمة– كتاب الكشاف في الرياضيات).

نأتي الآن لحل المسألة:

كل عدد من رقمين هو من الصورة $10a+b$ (حيث أنّ a هو رقم العشرات و b هو رقم الآحاد. نريد إيجاد الأعداد التي تحقق أنّ $(10a+b)^2$ وَ $(10b+a)^2$ هما عددان متعاكسان.

<u>حالة 1:</u>

إذا كان $(10a+b)^2$ عدداً مكوناً من أربعة أرقام وهو يساوي معكوس العدد $(10a+b)^2$. بما أنّ فرقهما يساوي $100a^2+20ab+b^2-(100b^2+20ab+a^2)=99(a^2-b^2)$

وهو من مضاعفات العدد 99 فيتوجب أن يقبل العدد $(10a+b)^2$ القسمة على 11، حسب الملاحظة (ج). لذلك $10a+b$ كذلك يقبل القسمة على 11 ولكن الأعداد التي تقبل القسمة على 11 ومكونة من رقمين هي 11,22,33,44,.........,99 أي أنه **<u>لا يوجد</u>** عدد مكوّن من رقمين مختلفين بحيث أنّ تربيعه هو عدد مؤلف من أربعة أرقام ويحقق شروط المسألة.

<u>حالة 2:</u>

إذا كان $(10a+b)^2$ عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام. حتى يساوي هذا العدد معكوس العدد $(10b+a)^2$ فإنّ العددين $(10a+b)^2$ وَ $(10b+a)^2$. حسب الملاحظة "أ". كلاهما بين 10 وَ 31. لذلك فإنّ a وَ b هما من الأرقام 1،2،3. نفحص الأعداد 12، 13، 23

$12^2=144$	$21^2=441$	وهو يفي بالشروط
$13^2=169$ ،	$31^2=961$	وهو يفي بالشروط
$23^2=529$	$32^2=1024$	لا يفي بالشروط

نستنتج وجود حلين فقط للمسألة وهما: 12 وَ 13.

المسألة الثانية:

لاحظ أنّ $756=36\times21$ وَ $756=63\times12$. العدد 12 هو معكوس 21 والعدد 63 هو معكوس 36. نرى أنّ حاصل ضرب العددين 21 وَ 36 يساوي حاصل ضرب معكوسَيهِما. هل توجد أزواج أعداد أُخرى (كل عدد مؤلف من رقمين) تحقق هذه الصفة؟ أوجدها.

نفرض أن العددين هما $\overline{ab}$ وَ $\overline{cd}$. حاصل ضرب العددين يساوي حاصل ضرب معكوسَيهِما يكافئ

$$(10a+b)\cdot(10c+d)=(10b+a)(10d+c)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$100ac+10(ad+bc)+bd=100bd+10(bc+ad)+ac$$
$$\Leftrightarrow$$
$$99(ac-bd)=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$ac=bd$$

أي أنّ حاصل ضرب رقمي آحاد العددين يساوي حاصل ضرب رقمي عشرات العددين.

أمثلة:

$(13,93),(13,62),(12,63),(12,84),(12,42)$
$(23,96),(23,64),(21,48),(21,36),(21,24),(14,82)$
$..............(26,93),(24,84)$

المسألة الثالثة

هل يوجد عددان، كل منها ثنائي المنزلة، بحيث أنّ مجموعهما يساوي مجموع معكوسيهما؟ أوجد جميع الحلول.

نفرض أن العددين هما $10a+b$، $10c+d$.

$$10a+b+10c+d=10b+a+10d+c$$
$$9(a+c)=9(b+d)$$
$$a+c=b+d$$

أي أنّ التساوي يحدث إذا وفقط إذا كان مجموع رقمي الآحاد يساوي مجموع رقمي العشرات

أمثلة: $(13,86),(12,98),(12,87)...(12,32),(13,97)$.

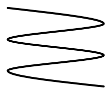
المسألة الرابعة

حزّيرة (توزيع): أمامك مجموعة الأعداد $\{10,11,12,13,14,15,.......28,29,30\}$

عدد الأعداد الموجودة فيها يساوي 21. نريد تقسيم المجموعة إلى ثلاث مجموعات في كل واحدة منها 7 أعداد، بحيث يكون مجموع الأعداد في كلٍ منها يساوي 140. كيف ؟

نوزّع الأعداد 27..........11، 10 على ثلاثة أعمدة بالتساوي بالشكل التالي:

عمود أول	عمود ثاني	عمود ثالث
12	11	10
13	14	15
18	17	16
19	20	21
24	23	22
25	26	27
30	28	29

(أنتبه أن التوزيع حسب  وهذا التوزيع يضمن توزيع عدد زوجي من الأعداد بشكل متساوٍ).

نضيف العدد 29 للعمود الثالث. نضيف العدد 30 للعمود الأول ونبدّل مواقع العددين 23، 24 ونضيف 28 للعمود الثاني ليصبح الحل:

عمود أول	عمود ثاني	عمود ثالث
12	11	10
13	14	15
18	17	16
19	20	21
23	24	22
25	26	27
30	28	29

المسألة الخامسة (أيّهم الصادق ؟)

قال طارق: حسبت حاصل ضرب العدد 342 في عدد صحيح آخر فحصلت على عدد يتألّف من 8 أرقام، الرقم 1 يظهر فيه 4 مرات ويظهر الرقم 5 فيه 3 مرات ويظهر فيه الرقم 2 مرة واحدة

قال رامي: حسبت حاصل ضرب العدد 544 في عدد صحيح مؤلّف من أربعة أرقام، مجموع أرقامه 20، فحصلت على عدد كبير مجموع أرقامه 27.

قال باهر: حسبت حاصل ضرب العدد 743 في عدد صحيح آخر فكانت النتيجة عدداً مكوّناً من 6 أرقام يظهر فيه كل واحد من الأرقام 3، 4، 7 مرتين.

فأيٌّ منهم صادق؟

الحل: الصادق هو باهر لأنّ $743\times1001=743743$.

لكن يتوجّب علينا الحكم في إجابات طارق ورامي. جواب طارق غير صحيح. فالعدد 342 هو عدد من مضاعفات 9 لأنّ مجموع أرقامه 9. عندما نضرب عدداً من مضاعفات 9 في عدد صحيح فإنّ النتيجة هي عدد من مضاعفات 9. لكن مجموع أرقام العدد الذي حصل عليه طارق، حسب قوله، 2+15+4=21 وهو ليس من مضاعفات 9.

جواب رامي غير صحيح، لأنّ مجموع أرقام العدد 544 يساوي 13، لذلك فهو يقسم على 3 والباقي 1. بما أنّ مجموع أرقام العدد الآخر 20 فهو يقسم على 3 والباقي 2. لذلك فحاصل ضربهما يقسم على 3 والباقي 2 لذلك فإنّ مجموع أرقامه لا يمكن أن يساوي 27، لأنّ عدد مجموع أرقامه 27 يقسم على 3 بدون باقٍ.

المسألة السادسة

لقد حضر المباراة الأخيرة التي جرت بين اتحاد أبناء سخنين ومكابي تل أبيب جمهور غفير يقارب 5000 متفرج. مقدار الخطأ لا يزيد عن 200. في إحصائية أجراها أحد المراسلين ورد أنّ: $\frac{27}{37}$ من الجمهور كانوا من مشجعي اتحاد أبناء سخنين و $\frac{5}{19}$ من الجمهور كانوا من مشجعي مكابي تل أبيب. أمّ الباقون فلم ينحازوا لأيّ فريق.

أ. كم كان عدد الجمهور بالضبط إذا افترضنا أنّ الإحصائية صحيحة؟

ب. كم كان عدد المشجعين لكل فريق ؟

جـ. كم كان عدد غير المنحازين ؟

حل: عدد الجمهور يجب أن يقبل القسمة بدون باقٍ على 37 وَ 19. أي أنه يجب أن يكون من مضاعفات العدد $703=37\cdot19$. نبحث عن عدد يقبل القسمة على 703 وهو قريب من العدد5000.

$5000\div703=7\frac{79}{703}$. نحسب $703\cdot7=4921$ و $703\cdot8=5624$. بما أن مقدار الخطأ لا يزيد عن 200 فالجواب المناسب هو 4921. لذلك:

عدد مشجعي سخنين = $\frac{27}{37}\cdot 4921 = 3591$

عدد مشجعي مكابي تل أبيب = $\frac{5}{19}\cdot 4921 = 1295$

عدد غير المنحازين = $1921-(3591+1295) = 35$

المسألة السابعة

نجح $\frac{5}{7}$ طلاب المدرسة في الرياضيات، ونجح $\frac{4}{5}$ الطلاب في اللغة العربية، ولم ينجح $\frac{2}{11}$ من الطلاب في أيّ من الموضوعين. معلوم أنّ عدد طلاب المدرسة لا يزيد عن 500.

أ. كم عدد طلاب المدرسة؟

ب. كم عدد الطلاب الذين نجحوا في الرياضيات؟

جـ. كم عدد الطلاب الذين نجحوا في اللغة الإنجليزية؟

د. كم عدد الطلاب الذين لم ينجحوا في الموضوعين؟

هـ. كم عدد الطلاب الذين نجحوا في الموضوعين؟

حل: عدد الطلاب يجب أن يقسم بدون باقٍ على 7 وَ 5 وَ 11.

أي أن عدد الطلاب من مضاعفات العدد $385 = 7\cdot 5\cdot 11$. بما أن عددهم لا يزيد عن 500 فهو تماماً 385.

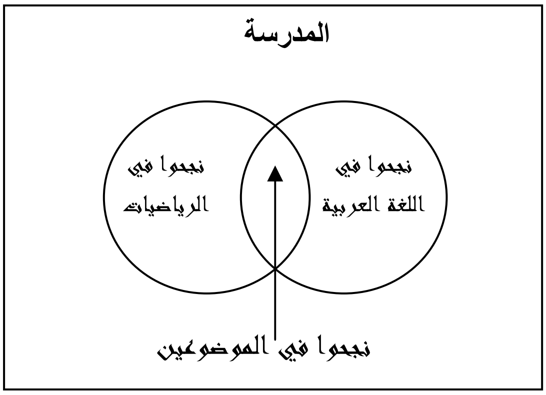
عدد الطلاب الذين نجحوا في الرياضيات = $\frac{5}{7}\cdot 385 = 275$

عدد الذين نجحوا في اللغة العربية = $\frac{4}{5}\cdot 385 = 308$

عدد الطلاب الذين لم ينجحوا في أي من الموضوعين = $\frac{2}{11}\cdot 385 = 70$

نفرض أنّ عدد الذين نجحوا في الموضوعين x. راقب مخطط ڤين (Venn) الآتي:

$$385 = 275 + 308 - x + 70$$
$$x = 275 + 308 + 70 - 385$$
$$= 268$$



المسألة الثامنة

قال الراصد الجوي: إنّ كمية الأمطار التي من المتوقع أن تهطل هذا العام تزيد عن المعدّل العام لكميات الأمطار التي هطلت في السنوات العشر الأخيرة بحوالي 50 ملمتراً.

أ. هل تفهم من أقوال الراصد الجوي أنّ الأمطار في هذا العام أشدّ غزارة من الأعوام العشرة الماضية.

ب. إذا علمت، بالإضافة لأقوال الراصد الجوي، أنّ السنة الماضية هي أقل سنة هطلت فيها الأمطار، فقد هطل فيها 400 ملمتراً من الأمطار، وأنّ السنة التي سبقتها بعامين هي أكثر سنة هطلت فيها الأمطار، فقد هطل فيها 1200 ملمتراً من الأمطار. فهل تفهم من أقوال الراصد الجوي أنّ كمية الأمطار التي ستهطل هذا العام أكثر من 1200 ملمترا أم أقل من 1200 ملمتراً ؟

أ. كلا، إنما الزيادة هي عن المعدّل العام.

ب. كمية الأمطار التي هطلت في 9 سنوات (قبل السنة الأخيرة) أصغر أو تساوي $10800 = 1200\cdot 9$. كمية الأمطار التي هطلت في السنوات العشر الأخيرة أصغر أو تساوي $11200 = 400 + 10800$. لذلك فإنّ المعدل في السنوات العشر الأخيرة أصغر أو يساوي $1120 = \frac{11200}{10}$، لذلك فإنّ كمية الأمطار المتوقعة لهذا العام أصغر أو تساوي $1170 = 50 + 1120$ أي أنها أقل من 1200 (وهذا يجيب على قسم "أ").

المسألة التاسعة

عدد المباريات التي لعبها اتحاد أبناء سخنين في دوري الدرجة العليا 33 مباراة. كانت النسبة بين عدد المباريات التي خسر فيها إلى عدد المباريات التي تعادل فيها إلى عدد المباريات التي فاز فيها 2:3:6 (انتبه: عدد المباريات التي فاز فيها هو الأكبر). يحصل الفريق على 3 نقاط عن كل فوز، ونقطة واحدة عن كل تعادل.

أ. في كم مباراة فاز الفريق ؟

ب. في كم مباراة تعادل الفريق؟

جـــ. ما عدد النقاط التي حصل عليها الفريق؟

الحل:

عدد الحصص 11=2+3+6.

عدد الخسارات: $2\cdot\frac{33}{11}=6$

عدد التعادلات: $3\cdot\frac{33}{11}=9$

عدد الانتصارات: $6\cdot\frac{33}{11}=18$

عدد النقاط $18\cdot3+9\cdot1=54+9=63$

المسألة العاشرة

أربعة أشخاص ووعاء فيه عدد من الشواقل. ذهب الأول إلى الوعاء عدّ الشواقل التي فيه وضع من جيبه بقدر نصفها وأخذ 27 شاقلاً. ذهب الثاني إلى الوعاء وقام بنفس العمل الذي قام به الأول. ذهب الثالث إلى الوعاء وقام بنفس العمل الذي قام به الأول والثاني. ذهب الشخص الرابع إلى الوعاء فوجده فارغاً. **كم شاقلاً كان في الوعاء قبل أن يأتي إليه الأشخاص ؟ وكم أخذ كل واحد منهم ؟**

الحل بالطريقة التراجعية:

الأول	الثاني	الثالث	المتبقي
أبقى الأول في الوعاء 30 شيكل لذلك كان في الصندوق قبل أن يأخذ منه 27 شيكل مبلغ 27+30=57 57= المبلغ الذي كان في الوعاء + نصفه. لذلك فإنّ المبلغ الذي كان في الوعاء= $57:\frac{3}{2}=38$	أبقى الثاني في الوعاء 18 شيكل لذلك كان في الصندوق قبل أن يأخذ منه 27 شيكل مبلغ 27+18=45 54= المبلغ الذي تركه الأول + نصفه. لذلك فإنّ المبلغ الذي تركه الأول= $45:\frac{3}{2}=30$	وجد الثالث 18 شيكل وضع من جيبه 9 شيكل (نصفها). ثمّ أخذ 27 شيكل	0
38	30	27	

كان في الوعاء 38 شيكل.

المسألة الحادية عشرة

عدد طلاب صف 34. عدد البنين 20 وعدد البنات 14. أجريت مباريات في لعبة الشطرنج بين كل طالبين في الصف. (أي أنّ كل طالب لعب مباراة واحدة مع كل طالب آخر في الصف). **أ) كم هو عدد المباريات التي أجريت؟ ب) كم عدد المباريات التي شارك فيها ولد وبنت ؟** (**إرشاد: جواب** (أ) **ليس 1122**).

عدد المباريات $\frac{34\cdot 33}{2}=561$

عدد المباريات التي شارك فيها ولد وبنت: $20\cdot 14=280$

(**من الممكن إضافة:** عدد المباريات التي جرت بين ولد + ولد هو $\frac{20\cdot 19}{2}=190$

عدد المباريات التي جرت بين بنت+بنت هو $\frac{14\cdot 13}{2}=91$)

$$561=280+190+91$$