نقاشات رياضيّة/ د. علي عثمان

1. نقاش حول أعداد أولية ذات أرقام متساوية.

النقاش بين "عمر" و" سارة".

عمر: العدد 11 هو عدد أولي وهو عدد مكّون من رقمين متساويين وسؤالي: هل يوجد آخر بنفس الصفات؟

سارة: كلا، الأعداد 22، 33، 44، 55،. ..99، ليست أعداداً أولية لأنها تقسم على 11 وهي أكبر من 11.

عمر: صحيح.... لكن: هل يوجد عدد أولي مكوّن من ثلاثة أرقام متساوية؟

سارة: من المؤكّد أن الأعداد 222، 333، و444.......999، ليست أولية. لأنها تقسم على الأعداد 2، 3، 4،. ..، 9 على التناظر.

عمر: لكن هل العدد 111 أولي؟

سارة: أظن ذلك. هيا نفحص.

عمر: لا، ليس أولياً لأنّ مجموع أرقامه 3 فهو يقبل القسمة على 3.

سارة: صحيح 111:3=37. لذلك 111 ليس أولياً. إنّه عدد مؤلّف.

عمر: إذن لا يوجد عدد أولي مكوّن من ثلاثة أرقام متساوية.

سارة: نعم، وهل يوجد عدد أولي مكوّن من أربعة أرقام متساوية؟

عمر: يكفي أن نفحص إن كان العدد 1111 أولياً. لأنّ 2222 و 3333 و..... و 9999 ليست أولية لأنها تقسم على 2وَ3وَ...وَ9 على التناظر.

سارة: أحسنت، نعم صحيح وكذلك العدد 1111 ليس أولياً لأنه يقسم على 11.

عمر: وكيف عرفت بهذه السرعة ؟

سارة: 1111 يساوي 1100 وَ 11 أي أنّه يساوي $11\cdot 11+100$ وهو يساوي $11\cdot 101$. لاحظ أنّ 1111 هو مجموع عددين كل منهما يقسم على 11 وهما 1100 وَ 11.

عمر: تفكير جميل. أتذكر الآن كيف شرح لنا المعلم أنّ العدد 3549 يقبل القسمة على 7. فقد قال: 3549 يساوي 3500 + 49. العددان 3500 وَ 49 كل منهما يقبل القسمة على 7 لذلك فإنّ مجموعهما يقبل القسمة على 7.

سارة: نعم إنّها فكرة بسيطة وجميلة. وهل يوجد عدد أولي مكوّن من خمسة أرقام متساوية ؟ يكفي أن نسأل: هل العدد 11111 هو عدد أولي؟

عمر: علينا أن نفحص قابلية قسمته على الأعداد الأصغر منه.

سارة (ضاحكة): هيا افحص أنت يا عمر قابلية قسمته على الأعداد الفرديّة وسأفحص أنا قابلية قسمته على الأعداد الزوجية.

عمر (مبتسم): كلا، بالعكس، أنا أفحص قابلية القسمة على الأعداد الزوجية؟

سارة: إني أمزح. فمن الواضح أنّ هذا العدد لا يقبل القسمة على أي عدد زوجي لأنّه فردي. في الحقيقة يكفي أن نفحص قابلية قسمته على الأعداد الأولية الأصغر من جذره ألتربيعي.

عمر (يستعمل الحاسبة): إن جذره ألتربيعي بالتقريب 105.4. لذلك يكفي أن نفحص قابلية قسمته على الأعداد الأولية الأصغر من 105. هيا نتعاون على الفحص افحصي أنت قابلية القسمة على الأعداد الأولية الأصغر من 105 وأكبر من 50 وأنا افحص قابلية القسمة على الأعداد الأولية الأصغر من 50.

وافقت سارة، وبدأ كل منهما الفحص باستعمال حاسبته. وبعد مدّة من الزمن.

قال عمر: هذا العدد 11111 ليس أولياً فهو يقبل القسمة على 41. فقد وجدت أنّ: 271=41:11111 أي أن 271·41=11111

سارة: أحسنت، لا حاجه لأن أواصل الفحص. أبشرك كذلك أن العدد 111111 (6 مرات واحد) ليس أولياً فهو يقبل القسمة على 3 لأنّ مجموع أرقامه 6.

عمر: صحيح وهو أيضاً يقسم على 11 لأنّ:

$$111111 = 110000 + 1100 + 11 = 11 \cdot (10000 + 100 + 1) = 11 \cdot 10101$$

سارة: أحسنت، لقد نجحت أنا في تعليمك هذه. كذلك فإن هذا العدد يقسم على 111 لأنّ:

$$111111 = 111000 + 111 = 111 \cdot (1000 + 1) = 111 \cdot 1001$$

ونستطيع الاستمرار في التحليل للعوامل:

$$111111 = 3 \cdot 37 \cdot 1001 = 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$

عمر: والعدد المكوّن من 8 أرقام وجميع أرقامه 1 ليس أولياً لأنه يقسم على 11. ونستطيع أن نعمم فنقول: إذا كانت جميع أرقام العدد 1 وعدد الأرقام زوجي فإنّ العدد ليس أولياً لأنه بالتأكيد يقبل القسمة على 11.

سارة: صحيح ولكن يجب الدقّة علينا أن نقول: إذا كانت جميع أرقام العدد 1 وعدد أرقام العدد زوجي وأكبر من 2 فإن العدد ليس أولياً.

عمر: أشكرك على التصحيح. أصحح أكثر وأقول: إذا كان العدد أكبر من 11وكانت جميع أرقامه 1 وعدد أرقامه زوجي أو من مضاعفات 3 فإنّ العدد ليس أولياً.

سارة: نعم صحيح، هيا نفحص الأمر بالنسبة للعدد 1111111 (عندما عدد الأرقام 7). (بعد عمل طويل، وجد عمر أن هذا العدد يقبل القسمة على 239).

عمر: وجدت أن العدد ليس أولياً فهو يقسم على 239. وفعلاً $1111111 = 239 \cdot 4649$

سارة: أحسنت، وماذا مع العدد $\overbrace{111.....1}^{\text{11 مرة}}$ ؟

عمر: وماذا مع العدد $\overbrace{111.....1}^{\text{13 مرة}}$ هل هو أولي.

سارة: علينا أن نبحث عن ذلك في المصادر وفي الانترنيت.

بعد هذا بعدة أيام، قالت سارة: بحثت في الانترنيت ووجدت أنّ هناك من بحث في الأمر قبلنا ووجد أنّ العدد $\overbrace{111.....1}^{\text{19 مرة}}$ هو أوّل عدد بعد العدد 11 الذي جميع أرقامه 1 وهو عدد أولي.

عمر: وهل يوجد عدد أكبر منه ويحقق الشرط؟

سارة: نبحث.

2. نقاش حول مربعات تامّة جميع أرقامها 1

النقاش بين مجد ورازي.

مجد: العدد 1 هو مربّع تامّ لأنّ $1 = 1^2$. هل يوجد مربع تامّ أكبر من 1 بحيث أنّ جميع أرقامه 1؟

رازي: العدد 11 ليس مربعاً تاماً لأنّه لا يساوي ضرب عدد صحيح في نفسه. كذلك الأمر بالنسبة للعدد 111 فهو يساوي $3 \cdot 37$.

مجد: أذكر أنّ المعلم أثبت لنا أنّ العدد $\overbrace{111.....1}^{\text{21 مرة}}$ ليس مربعاً تامّاً. فقد قال: مجموع أرقامه يساوي 21 وهو من مضاعفات 3 وليس من مضاعفات 9. لذلك فإنّ هذا العدد هو من مضاعفات 3

وليس من مضاعفات 9. إذا كان المربع التام من مضاعفات 3 فيجب أن يكون من مضاعفات 9 لأنه تربيع لعدد من مضاعفات 3. ($(3n)^2 = 9n^2$).

رازي: صحيح، لذلك فإنّ الأعداد $\overbrace{111......11}^{\text{12 مرة}}$ وَ $\overbrace{111.....1}^{\text{15 مرة}}$ وَ $\overbrace{111.....1}^{\text{24 مرة}}$ وَ

ليست مربعاً تامّة لأنها تقبل القسمة على 3 لكنها لا تقبل القسمة على 9.

مجد: وهل العدد $\overbrace{111.....1}^{\text{9 مرات}}$ هو مربّع تامّ.

رازي: هذا العدد يقبل القسمة على 9، لكن هذا لا يعني أنّه مربّع تامّ.

هيا نفحص ذلك بواسطة الحاسبة. إن الجذر ألتربيعي لهذا العدد حسب الحاسبة هو بالتقريب 10540.92 فهو ليس عدداً صحيحاً. لذلك فإنّ هذا العدد ليس مربعاً تامّاً.

مجد: وهل العدد $\overbrace{111.....1}^{\text{18 مرة}}$ هو أيضاً ليس مربعاً تامّاً؟

رازي: مجموع أرقامه يقسم على 9 فهو يقسم على 9 لكن هذا لا يعني أنه مربّع تامّ.

مجد: نترك هذا قليلاً. تذكّر أننا أهملنا الأعداد التي يكون عدد أرقامها ليس من مضاعفات العدد 3. فهل العدد 1111 هو مربع تامّ.

رازي: كلا، فإنّ 101 · 11=1111 فهو لا يساوي ضرب عدد في نفسه.

لكن هل العدد 11111 هو مربّع تامّ؟ الحاسبة تبين لنا أنّ هذا العدد ليس مربعاً تامّاً. لكن هل هناك تفسير منطقي يبيّن لنا الأمر؟

مجد: نعم، مجموع أرقام العدد يساوي 5 فهو يقسم على 3 والباقي 2.

لقد تعلمنا: تربيع أي عدد صحيح هو عدد من مضاعفات 9 أو عدد باقي قسمته على 3 يساوي 1. وهذا صحيح فلو كان العدد من مضاعفات 3 فإنّ تربيعه من مضاعفات 9 وإن كان العدد يقسم على 3 والباقي 1 فإنّ تربيعه يقسم على 3 والباقي 1.

$$3\cdot 16+1=7^2=49,5\cdot 3+1=16=4^2$$

$$((3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$$

وإن كان العدد يقسم على 3 والباقي 2 فإنّ تربيعه يقسم على 3 والباقي 1.

$$(3\cdot 21+1=8^2=64,8\cdot 3+1=25=5^2)$$

$$((3k+2)^2=9k^2+12k+4=9k^2+12k+3+1=3(3k^2+4k+1)+1$$

رازي: عظيم، نستنتج أن الأعداد $\overbrace{111.....1}^{\text{8 مرات}}$ وَ $\overbrace{111.....1}^{\text{11مرة}}$ وَ $\overbrace{111.....1}^{\text{14 مرة}}$ وَ..... ليست مربعات تامّة لأنها تقسم على 3 والباقي 2. حتى الأن أصبحنا نعلم التالي: إذا كان عدد الأرقام 1 من مضاعفات 3 وليس من مضاعفات 9 فإن العدد ليس مربعاً تامّاً. وإذا كان عدد الأرقام 1 يقسم على 3 والباقي 2 فإنّ العدد ليس مربعاً تامّاً. وماذا مع باقي الحالات؟

مجد: لا أعرف. هيا نستعين بمعلومات رغد. (توجه مجد ورازي إلى رغد يطلبان المساعدة.)

قال رغد: ما وجدتماه جميل وصحيح ولا يحلّ المسألة بشكل نهائي. في الواقع لا يوجد مربّع تام أكبر من 1 بحيث أن جميع أرقامه 1. ونستطيع أن نبرهن ذلك بالاستعانة بباقي القسمة على 8 راقبوا الجدول الآتي:

باقي قسمة العدد على 8	باقي قسمة تربيع العدد على 8
0	0
1	1
2	4
3	1
4	0
5	1
6	4
7	1

نلاحظ أن باقي قسمة المربّع التام على 8 هو أحد الأرقام 4، 1، 0.

أما باقي قسمة العدد الذي جميع أرقامه 1 والذي عدد أرقامه أكبر أو يساوي 3 فهو يساوي باقي قسمة العدد 111 على 8 وهو يساوي 7. لذلك فهو ليس مربعاً تامّاً لأنّ باقي قسمته على 8 ليس 0 أو 1 أو 4. تذكروا أن باقي قسمة عدد على 8 يساوي باقي قسمة العدد المكوّن من آخر ثلاثة أرقام:

| <u>آحاد</u> | <u>عشرات</u> | <u>مئات</u> | على 8.

ما هذه الشطارة يا رغد لقد أدهشتنا كل الاحترام. (قال رازي وقال مجد).

رغد (والسعادة على محياه): يوم لك ويوم عليك، من المؤكّد أنّ أحدكم سيدهشني بشطارته غداً.