تدريس الرياضيات بطريقة الاكتشاف

بقلم: د. علي عثمان (في كتاب : نحو تفكير أسرع وأجمل وأرقى.إصدار أكاديمية القاسمي 2000)

تتلخص طريقة الاكتشاف في تدريس الرياضيات بتوجيه الطلاب لحل المسائل عن طريق إجراء التجارب واستخلاص النتائج الى أن ينطقوا بالنظرية.

إذا حدث هذا واكتشف التلاميذ النظرية فإن السعادة ستغمرهم بسبب شعورهم بالنصر وازدياد ثقتهم بأنفسهم. بعدها سيطلبون المزيد من التحديات وستزداد قدراتهم على حل المسائل. ولكن ينبغي أن يكون المعلم حكيماً في اختياره للمسألة، إذ يجب أن تكون في مستوى قدرات التلاميذ وعليه أن يكون فناناً في توجيه إرشاداته المتعلقة بالزمن وبتفاعل التلاميذ مع المسألة وسلوكهم، لا يسابق التلاميذ الى اكتشاف النظرية أو الحل، معززاً لنتائجهم الصحيحة الأولية، مصلحاً للأخطاء التي يقع فيها بعضهم ومحفزاً إيّاهم على التصحيح.

إن رغبة التلاميذ في الاكتشاف تؤدي الى قبولهم تعلم المهارات الحسابية والجبرية والتي هي بمثابة الوسيلة لأجل الوصول الى الهدف المنشود، ألا وهو الاكتشاف. كما أن معرفتهم بوجوب شكهم بجواز صدق الاكتشاف عموماً وجواز خطئه خصوصاً، يدفعهم الى تعلم الطرق التحليلية وتعلم طرق البرهان.

إن ما يؤخذ سلباً على تدريس الرياضيات في الجامعات هو انعدام طريقة الاكتشاف في التدريس. يشعر الطلاب في غالبيتهم بالضياع، وينتقدون التعليم بقولهم:"كل الرياضيات هي مجرد تعاريف، نظريات وبراهين، وكل ما علينا عمله هو حفظ المادة غيباً". يعود سبب ذلك لضخامة المادة المقرر تدريسها وضيق الوقت بالنسبة لها وكثرة الطلاب في المحاضرات. لكن الأمر مختلف في المدارس الابتدائية والإعدادية، فلا وجود لمشكلة ضيق الوقت بالنسبة للمواد وأما مشكلة كثرة الطلاب فمن الممكن التغلب عليها عن طريق تقسيم التلاميذ الى مجموعات عمل صغيرة. كذلك فإن المحاضر في الجامعة يفترض أن طلابه

يرغبون تعلم الرياضيات وأن لديهم الخيال الواسع لتوقع النظريات والقدرة على التفكير المجرد.

إن هذه الأمور لا تتوفر في التلميذ الصغير وعلى المعلم أن يعمل على بنائها فيه. إحدى الوسائل المركزية هي تدريس موضوع الرياضيات حسب طريقة الاكتشاف.

أما في كليات إعداد المعلمين والتي تخرج المعلمين لتعليم تلاميذ المرحلتين الابتدائية والإعدادية، فمن الواجب بناء المسافات بشكل يسمح بتدريس بعض المواد بواسطة طريقة الاكتشاف، حتى يتوجه تفكير معلم المستقبل الى العمل على تنفيذ هذه الطريقة مع طلابه. ومن واجب المحاضرين في هذه الكليات معاينة مواد التدريس في المرحلتين الابتدائية والإعدادية والعمل مع طلابهم على إمكانية تدريس هذه المواد وفقاً لطريقة الاكتشاف.

سأورد فيما يلي بعض المسائل وحلها حسب طريقة الاكتشاف:

المسألة الأولى:

ما هو رقم آحاد العدد 2^{105}؟

إن الآلة الحاسبة التي بين أيدي التلاميذ لن تسعفهم في حل هذه المسألة. إذ أن الآلة الحاسبة تقرب العدد 2^{105} الى 4.056481921×10^{31}.

أي أن الآلة الحاسبة اعتبرت جميع الأرقام التي تأتي على يمين العدد 4056481921 والتي عددها 22، أصفاراً. ولكن مما هو معلوم فإن العدد 2^{105} لا يقبل القسمة على 5 أي أن رقم آحاده لا يمكن أن يكون صفراً.

توجيه المعلم:

حلوا المسألة باستبدال العدد 105 مرة بالعدد 1، مرة بالعدد 2، مرة بالعدد 3، مرة بالعدد 4، ومرة بالعدد 5، وحاولوا استخلاص فكرة.

يتوصل التلاميذ الى الجدول الآتي:

العدد	رقم آحاده
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	6
2^5	2
2^6	4
2^7	8
2^8	6

من السهل أن يلاحظ التلاميذ أن الأرقام (2,4,8,6) تعود على نفسها، ومن السهل أن يكتشفوا: أنه عندما يكون n من مضاعفات العدد 4 فإن: رقم آحاد العدد 2^n هو 6، وأن رقم آحاد العدد 2^{n+1} هو 2 ، وأن رقم آحاد العدد 2^{n+2} هو 4 ، وأن رقم آحاد العدد 2^{n+3} هو 8.

من هنا يكتشفون بسهولة أن رقم آحاد العدد 2^{105} هو 2 لأن 4.26+1=105.

المسألة الثانية:

في التصفيات للفوز ببطولة تنس الطاولة يشترك 1000 لاعب. يشترك في كل مباراة لاعبان. كل مباراة تنتهي بفوز لاعب وخسارة اللاعب الآخر. اللاعب الخاسر في إحدى المباريات لا يشترك في مباريات أخرى، والفائز يواصل المشوار. البطل هو اللاعب الذي لم يخسر في أية مباراة بعد أن خسر كل لاعب من اللاعبين الآخرين في إحدى المباريات.

كم مباراة ستجرى؟

توجيه: حل المسألة باستبدال العدد 1000 بالعدد 1 مرة، بالعدد 2 مرة، بالعدد 3 مرة، بالعدد 4 مرة...

الجدول الذي سيتوصل إليه الطلاب:

عدد اللاعبين	**عدد المباريات**
2	1
3	2
4	3
5	4

ومن السهل أن يكتشفوا أن عدد المباريات أقل بواحد من عدد اللاعبين، وعليه فإن الجواب في حالة كون اللاعبين 1000 هو 999.

قد يلاحظ الطلاب أن عدد المباريات يساوي عدد المهزومين، والأمر واضح فكل مهـزوم سيشارك في مباراة واحدة فقط. ولكن ملاحظتهم هذه، وهي ملاحظة حكيمة، تـأتي بعـد معرفتهم للجواب، وهذه الملاحظة هي عملياً برهان على صحة إجابتهم.

المسألة الثالثة:

من أجل أن يدخل الشخص الى القصر فإن عليه اجتياز 5 بوابات. على كل بوابـة يقـف حارس. يأخذ الحارس من الشخص نصف ما معه من نقود ويعطيه ديناراً واحداً، كم كان في جعبة شخص دخل القصر ومعه ديناران؟

بعد أن يوجه المعلم المسألة لتلاميذه يجد أنهم يتسابقون الى الإجابة: كان معه ديناران.

إن من عادة المعلم أن يسأل عن التفسير. وكعادتهم يقول الطلاب: نفحص ذلـك. يباشـر الطلاب في الفحص والمعلم غير مبال لما يقولون لأنه يعلم أن جـوابهم صـحيح. كيـف يواصل المعلم؟

هناك معلم ينتقل الى شيء آخر، قد يشجع الطلاب بكلمة جميلة وقد لا يفعل. هناك معلـم يعرف أن طلابه قد توصلوا الى النتيجة عن طريق التخمين، وفي نظرة "التخمـين" لـيس طريقة رياضية، فتراه يحملق في طلابه قائلاً: أريد طريقة لحل المسألة!! ماذا يحدث هنا! الطلاب حلو المسألة ولم يحصلوا على أي تعزيز من معلمهم، المعلم يشعر أنه لم يفد طلابه

في شيء من عرضه لهذه المسألة من الناحية الرياضية. المسألة محلولة والمعلم يحث طلابه على حلها بطريقة رياضية. في هذه الحالة فإن المعلم يشعر طلابه بأن الرياضيات هو موضوع صعب المراس، نبحث فيه عن الطرق الصعبة لحل المسألة السهلة. ألا يسبب هذا إحباطاً لأفضل الطلاب!

أما المعلم الحكيم فإنه يفرح لفرح طلابه باكتشاف حل المسألة، فالمسألة هي أحجية جميلة. يتوجه الى طلابه بالسؤال: ماذا يكون الجواب لو استبدلنا العدد 5 بالعدد 10؟ بعد لحظات ينهض الطلاب يقولون: يبقى الجواب على ما هو، حتى لو استبدلنا العدد 5 بالعدد 100 (أو بأي عدد آخر).

يتوجه الى طلابه بطلب آخر: أبقوا العدد 5 على حاله واستبدلوا كلمة "ديناران" ب "ثلاثة دنانير". بحماس شديد يتوجه الطلاب عازمين على حل المسألة، أشبه بفريق أحرز هدفين في مرمى الخصم في الدقائق الخمس الأولى. المعلم يراقب سلوك طلابه. قد يلاحظ أن بعضهم قد أهملوا حل المسألة. عندها يتوجه إليهم ويوجههم الى تصغير عدد البواب من 5 الى 1 ومن ثم الى 2. عندما يكون عدد البوابات 1 فلا بد أن يلاحظ الطلاب أن 1+2=3 وأن 2 هو نصف ما كان معه، لذلك كان معه 4 دنانير.

وهذه الفكرة تقودهم لحل المسألة في حالة كون عدد البوابات 2 فإن 3+1=4. العدد 3 هو نصف ما كان معه. لذلك فقد كان معه 6 دنانير. وهكذا يتوصلون الى طريقة الحل التراجعي، ويكون جوابهم:

قبل البوابة الأولى كان معه 4 دنانير، قبل البوابة الثانية كان معه 6 دنانير، قبل الثلاثة كان معه 10 دنانير، قبل الرابعة كان معه 18 ديناراً. وقبل الخامسة كان معه 34 ديناراً.

القاعدة التي قد ينطق بها الطلاب: نطرح 1 ونضرب الناتج في 2.

من حل المسألة يتبين للطلاب أن "التخمين" طريقة قد يطول عدد مراحلها، وبذلك فهي تحتاج الى الوقت الكثير، وبذلك فإن اهتمامهم بالتفكير التحليلي سيأخذ بالازدياد.

المسألة الرابعة:

احسب المجموع الآتي: 1+3+5...+97+99

يقوم الطلاب بإجراء التجارب:

$1=1=1^2$

$1+3=4=2^2$

$1+3+5=9=3^2$

$1+3+5+7=16=4^2$

يكتشف الطلاب أن مجموع الأعداد= تربيع عددها، وبما أن عدد الأعداد 1،3،5...99 هو 50 لذلك فإن مجموعها يساوي 50^2 وهو يساوي 2500. قد يشك بعض الطلاب في صحة الإدعاء بأن عدد الأعداد 50، ويمكن تفسير ذلك على النحو الآتي: عدد الأعداد الطبيعيـــة 1،2،3...100 هو 100 نصفها زوجية ونصفها فردية، لذلك فإن عدد الأعداد الفردية هو 50 والأعداد الفردية هي 1،3،5...99.

ويمكن أن نعمم فنقول أن عدد الأعداد الفردية: 1,3,5,…,2n-1 هو n لذلك فإن:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

قد يسأل بعض الطلاب عن مجموع الأعداد الزوجية. إن لم يحدث ذلك فيفضل أن يرشدهم المعلم لذلك. ما هو مجموع الأعداد 2 + 4 + 6 + ... + 100 ؟

توجيه المعلم: أيهما أكبر 2 + 4 + 6 +...+ 100 أم 1 + 3 + 5 +...+ 99 وبكم؟

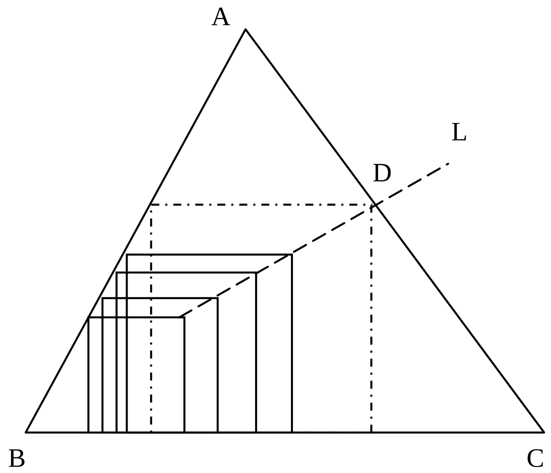
قد يجيب الطلاب إجابة صحيحة، وقد تسمع إجابات خاطئة. يطلب مـــنهم الإجابـــة عـــن السؤال بالنســـبة ل: 2+4 و 1+3 وبالنســـبة ل 2+4+6 و 1+3+5، بعـــد هـــذا فـــإنهم سيتوصلون الى النتيجة الصحيحة وهي:

2+4+ ... +100 يزيد ب50 عن 1+ 3 +...+ 99 وعليه فإن 2550=100+...+6+ 4 + 2.

ونستطيع أن نعمم ذلك على النحو التالي:

$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n^2 + n = n(n + 1)$ ومن هنا ينتج أن: $1+2+3...+n=n(n+1)/2$.

المسألة الخامسة:



معطى المثلث ABC أرسم داخل المثلـــث مربعاً بحيث يقع رأسان من رؤوسه على الضلع BC رأس على الضلع AB والرأس الرابع على الضلعAC.

توجيه: أرسم مربعاً بحيث يقع رأسان من رؤوسه على الضلع BC وأحد الرؤوس على الضلع AB. أجر التجربة عدة مرات.

سيكتشف الطلاب أن الرؤوس الأربعة لهذه المربعات تقع على مستقيم واحدL، لذلك فلا بد للرأس الرابع للمربع المطلوب أن يقع على هذا المستقيم. لذلك فإن الرأس الرابع للمربـــع المطلوب هو نقطة تقاطع المستقيم L مع الضلع AC (النقطة D في الشكل) بعد أن وجـــدنا D، ننزل منها عموداً على الضلع BC ونرسم منها موازياً للضلع BC وبواســـطة القيـــاس يتأكد الطلاب من صحة ما توصلوا إليه.

المسألة السادسة:

لنفرض أن ابناً لأبوين صالحين أنعم الله عليه بهداه فاستمع لنصح والديـــه فـــامتنع عـــن التدخين ومقابل ذلك اعتاد أن يوفر يومياً مبلغاً من المال يساوي ثمن علب السجائر الـــذي كان سيدفعه فيما لو لم يفعل ذلك (لنفرض أن ذلك 20 شيكلاً) لمدة خمسة أعوام. خلال هذه الفترة من الزمن فإنه سيدخر ما يقـــارب 36500 شـــيكلاً. (لأن $36500=20\times365\times5$، باعتبار أن العام 365 يوماً). لنفرض أيضاً أن الوالدين كافآ ابنهما فأكملا المبلغ الـــى مـــا يعادل 1 كيلو غرام من الذهب. ولنفرض أن هذا الابن بدأ مشروعاً اقتصادياً برأس المال هـــذا

(1 كيلو غرام ذهب)، وأن الله سبحانه وتعالى بارك له في مشروعه، وأن الابن سعى في السبل الشرعية من أجل أن يزيد رأس ماله بنسبة 20% عاماً بعد عام، وأن الله يسر له الأمور وحقق له مسعاه، فماذا سيصير رأس ماله بعد عشرين عاماً؟ بعد خمسين عاماً؟

الحل: نبدأ بتقصي الأمور.

في نهاية العام الأول سيصير رأس المال 1.2 كغم من الذهب، وهو رأس المال مع بداية العام الثاني.

لذلك ففي نهاية العام الثاني سيصير رأي المال $(1.2)^2 = (1.2)*(0.2)+(1.2)$.

وبنفس الطريقة نكتشف أن رأس المال في نهاية العام الثالث سيصير $(1.2)^3$ كغم من الذهب. من هنا نكتشف أن رأس المال سيصير في نهاية العام رقم n مساوياً $(1.2)^n$ كغم من الذهب. وباستعمال الحاسبة نجد أن: $(1.2)^{20}=38.34$ تقريباً و $(1.2)^{50}=9100$ تقريباً.

أي أن رأس المال سيصير بعد عشرين عاماً ما يقارب 38 كيلو غراماً و 340 غراماً من الذهب. وسيصير رأس المال بعد خمسين عاماً ما يضاهي قليلاً 9100 كيلو غراماً من الذهب. إنه لأمر مدهش حقاً. فلو افترضنا أن رأس المال البدائي كان 50000 شيكلاً فإن رأس المال سيصير بعد 50 عاماً ما يضاهي خمسة وأربعين مليوناً من الشواكل.

كثيراً ما تجد أناساً أتقياء قد أنعم الله عليهم ورزقهم رزقاً وفيراً، هم عرضة لظن الناس بهم سوء نزاهتهم، رغم أنه لم يثبت من ذلك شيء. من هذا الحساب قد يجد أولئك النزيهون دفاعاً عن نزاهتهم فيتقون ظن السوء بهم. إن توجيه هذه المسألة للطلاب من شأنه حثهم على عدم الإسراف، تجنب التدخين، ورفع معنويات الفقراء منهم. إذ تتعزز لديهم الآمال بتحسن أوضاعهم المالية مستقبلاً إذا عملوا بجد ومثابرة، وإن السبيل بحاجة الى الصبر، فيسعون الى التحلي به، يطردون الحسد من نفوسهم فيتقون شروره عليهم وعلى الناس.

إن الحلول والنتائج التي توصل إليها التلاميذ في المسائل الست السابقة هي نتائج صحيحة، وإن هذه المسائل هي أمثلة لمسائل يمكن عرضها للتلاميذ في مراحل الدراسة الإعدادية

وحتى الابتدائية. في مراحل متقدمة من واجب المعلم أن يلفت نظر تلاميذه الى أن ليس كل ما يلمع ذهباً. فهناك قضايا يمكن أن يكتشفوها ويتبين أنها ليست صحيحة دائماً. لنضـــرب مثلاً على ذلك:

القضية: 2^p-1 هو عدد أولـــي لكـــل p أولـــي. نلاحـــظ أن $2^2-1=3$ =عـــدداً أوليـــاً، $2^3-1=7$=عدداً أولياً، $2^5-1=31$ =عدداً أولياً، $2^7-1=127$ =عدداً أولياً. وقـــد يتســـرع الطالب ويظن أن القضية هي قضية صواب دائماً، ولكن عندما نفحـــص صـــحة القضـــية بالنسبة للعدد 11 نلاحظ أن $2^{11}-1=2047$ وهو ليس بعدد أولـــي لأن $89\times23=2047$. هذا الأمر يحتم علينا برهان صحة النظريات التي نكتشفها.

إن من الأهداف التي يجب على معلم الرياضيات أن يعمل على تحقيقها فـــي تلميـــذه، أن يصير تلميذه قادراً على الاكتشاف في شتى مجالات العلوم، محللاً للنتائج ورابطاً بينهـــا، عارفاً أن هناك العام وأن هناك الخاص، عالماً أن هناك الممكن وأن هناك المستحيل، لديه القدرة على توقع القضايا، مدركاً جواز صواب القضية وجواز عكـــس ذلـــك وأن أمامـــه سبيلين إما البرهان وإما التفنيد، وأن إزالة شرط من شروط القضية يعنـــي التعمـــيم، وأن إضافة شرط لشروط القضية معناه التخصيص، فاهماً أن موضوع الرياضيات يبنى علـــى المصطلحات والبديهيات. وأن للمصطلح مفهوماً لا يقبل التأويل، وأن البديهية غير قابلـــة للدحض ولا للبرهان، وأن نفي البديهية لا يمكن دحضه ولا برهانه، فمن الجائز اعتبـــاره "بديهية". عادة يؤخذ بالبديهية التي تتفق مع العقل الإنساني، وإذا أخذ بنفيها على أنه بديهية فإن ما يبنى على أساسه صحيح من الناحية الرياضية، وصحيح في عالم خيالي قد يـــدرك العقل الإنساني ماهيته فيما بعد.