العلاقة بين π وضرب الأعداد الزوجية وضرب الأعداد الفرديّة

بقلم: د. علي عثمان

نبدأ بالمتوالية: $A_n = \left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\ \ldots\ldots\ 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\ \ldots\ldots(2n+1)}\right]$ وهي المتوالية التي تنتج عندما نختار عدداً فردياً كبيراً ثمّ نحسب نتيجة قسمة حاصل ضرب الأعداد الزوجية الأصغر منه على حاصل ضرب الأعداد الفردية ابتداءً من 1 وانتهاءً به. نريد تقدير النتيجة. نفرض أنّ العدد الفردي الذي اختير هو $2n+1$. المقدار الذي نريد تقديره هو:

$$A_n = \left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\ \ldots\ldots\ 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\ \ldots\ldots(2n+1)}\right]$$

نربّع الطرفين:

$$A_n^2 = \left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\ \ldots\ldots\ 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\ \ldots\ldots(2n+1)}\right]^2$$

$$= \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdot 10\ \ldots\ldots\ (2n-2)(2n)2n}{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9^2\cdot 11^2\ldots\ldots\ (2n-1)^2\cdot(2n+1)^2}$$

$$2\left(\frac{2\cdot 4}{3^2}\right)\left(\frac{4\cdot 6}{5^2}\right)\left(\frac{6\cdot 8}{7^2}\right)\ldots\ldots\ldots\ \frac{(2n-2)(2n)}{(2n-1)^2}\cdot\frac{2n}{(2n+1)^2}$$

$$\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{24}{25}\right)\left(\frac{48}{49}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\left(\frac{4n^2-4n}{4n^2-4n+1}\right)\cdot\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\cdot\left(\frac{2}{2n+1}\right)$$

بما أنّ كل واحد من الأعداد المضروبة أصغر من 1 فإنّ:

$$\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{24}{25}\right)\left(\frac{48}{49}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\left(\frac{4n^2-4n}{4n^2-4n+1}\right)\cdot\left(\frac{2n}{2n+1}\right)<1$$

لذلك فإنّ: $\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{24}{25}\right)\left(\frac{48}{49}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\left(\frac{4n^2-4n}{4n^2-4n+1}\right)\cdot\left(\frac{2n}{2n+1}\right)<\frac{2}{2n+1}$

لذلك فإنّ: $A_n<\sqrt{\frac{2}{2n+1}}$.

المقدار: $\sqrt{\frac{2}{2n+1}}$ هو حاصر من أعلى لـــ (A_n)، نجد الآن حاصراً من أسفل له.

$$A_n^2 = \left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10 \ldots\ldots\ldots\ldots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11 \ldots\ldots (2n+1)}\right]^2$$

لذلك فإنّ:

$$A_n^2 = \frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot 10^2\cdot \ldots\ldots\ldots\cdot (2n)^2}{(1\cdot 3)\cdot(3\cdot 5)\cdot(5\cdot 7)\cdot(7\cdot 9)\cdot(9\cdot 11)\ldots\ldots\ldots\big((2n-1)\cdot(2n+1)\big)(2n+1)}$$

وهو يساوي:

$$A_n^2 = \frac{2^2}{(1\cdot 3)}\frac{4^2}{(3\cdot 5)}\frac{6^2}{(5\cdot 7)}\frac{8^2}{(7\cdot 9)}\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot\frac{(2n)^2}{\big((2n-1)\cdot(2n+1)\big)}\frac{1}{(2n+1)}$$

لكنّ $(2n)^2 > (2n-1)(2n+1)$ لكل n طبيعي لأنّ $4n^2 > (2n-1)(2n+1) = 4n^2 - 1$،

وعليه فإنّ:

$$\frac{2^2}{(1\cdot 3)}\frac{4^2}{(3\cdot 5)}\frac{6^2}{(5\cdot 7)}\frac{8^2}{(7\cdot 9)}\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot\frac{(2n)^2}{\big((2n-1)\cdot(2n+1)\big)} > 1$$

لأنّه يساوي حاصل ضرب أعداد كل منها أكبر من 1. لذلك فإنّ:

$$A_n^2 > \frac{1}{(2n+1)}$$

لذلك فإنّ:

$$A_n > \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

<u>نتيجة:</u>

$$\sqrt{\frac{1}{2n+1}} < A_n < \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

نلاحظ أيضاً أنّ حدود هذه المتوالية تقترب إلى الصفر.

نتيجة: إذا كانت $B_n = \left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\ldots\ldots\ldots\ldots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\ldots\ldots (2n-1)}\right]$ فإنّ:

$\sqrt{2n+1} < B_n < \sqrt{2(2n+1)}$ لكل n طبيعي، لأنّ $B_n = (2n+1)A_n$.

ملاحظة:

عند ضرب بسط ومقام المقدار $\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10.....2n}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11.....(2n-1)}$ في $2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10.....2n$

نحصل على:

$$B_n = \frac{(2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10.....2n)^2}{2.3.4\cdot5.6\cdot7.8\cdot9.10\cdot11.....(2n-2)(2n-1).2n}$$

نلاحظ أنّ المقام يساوي $(2n)!$ أمّا البسط فهو :

$$\left[2^n(1\cdot2\cdot3\cdot4.....n)\right]^2 = 4^n(n!)^2$$

لذلك فإنّ: $B_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$ وهو يساوي $4^n \Big/ \binom{2n}{n} = 4^n \Big/ C^{\ n}_{2n}$. (حيث أنّ الصورة $\binom{m}{k}$ ترمز للصورة العامّة لمعاملات نيوتن و $\binom{m}{k}$ يساوي عدد الإمكانيات لاختيار k عناصر من مجموعة مكوّنة من m عناصر ويرمز له أيضاً $C^{\ m}_{\ k}$).

نتيجة:

$$\sqrt{2n+1} < 4^n \Big/ C^{\ n}_{2n} < \sqrt{2(2n+1)}\ .$$

نتيجة:

$$4^n \Big/ \sqrt{2(2n+1)} < C^{\ n}_{2n} < 4^n \Big/ \sqrt{2n+1}\ .$$

ب. صيغة Wallis لتقريب π

أعرض فيما يلي صيغة Wallis لحساب قيمة π كنهاية لمتوالية ضرب، وطريقة الوصول إليها. أمّا الصيغة فهي:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots\cdots\frac{2k}{2k+1}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\cdots\frac{2k-1}{2k}} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots\cdots\cdots .$$

سنعرض فيما يلي المراحل التي تؤدي للحصول على هذه الصيغة.

نرمز: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$

قضيّة(أ): لكل k طبيعي يتحقق أنّ $I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2}$.

برهان: نتوصل لهذه العلاقة بواسطة التكامل بالأجزاء.

$$I_{2k} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2k}\, dx = -\cos x (\sin x)^{2k-1} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (2k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 (\sin x)^{2k-2}\, dx$$

$$= (2k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-(\sin x)^2\right)(\sin x)^{2k-2}\, dx$$

$$= (2k-1) I_{2k-2} - (2k-1) I_{2k}$$

لذلك فإنّ: $2kI_{2k} = (2k-1) I_{2k-2}$. وهي تكافئ $I_{2k} = \frac{(2k-1)}{2k} I_{2k-2}$. أي أنّ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2k}\, dx = \frac{2k-1}{2k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2k-2}\, dx$$

نتيجة (أ):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2k}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \ldots\ldots\ldots \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \frac{2k-1}{2k}$$

برهان: من السهل أن نتأكّد من أنّ $I_0 = \frac{\pi}{2}$ ، كذلك فإنّ $I_{2n} \Big/ I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}$ مما عرفنا في القضية السابقة. لذلك فإنّ:

$$I_0 = \frac{\pi}{2}$$
$$I_2 \big/ I_0 = \frac{1}{2}$$
$$I_4 \big/ I_2 = \frac{3}{4}$$
$$I_6 \big/ I_4 = \frac{5}{6}$$
$$I_8 \big/ I_6 = \frac{7}{8}$$

.

.

$$I_{2n} \big/ I_{2n-2} = \frac{2k-1}{2k}$$

وعند ضرب جميع الحدود في كل طرف نتوصل إلى المعادلة:

$$I_{2k} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2k}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \frac{2k-1}{2k}$$

قضية(ب): لكل k طبيعي يتحقق:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2k+1}\, dx = \frac{2k}{2k+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2k-1}\, dx$$

نتوصل لهذه العلاقة بواسطة التكامل بالأجزاء بنفس الصورة كما في القضية السابقة.

نتيجة (ب): $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2k+1}\, dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{2k}{2k+1}$$

برهان: من السهل التأكّد من أنّ $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1$. من القضية (ب) نستنتج أنّ:

$$I_{2n+1} \big/ I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} .$$

لذلك فإنّ:

$$I_1 = 1$$
$$I_3 \big/ I_1 = \frac{2}{3}$$
$$I_5 \big/ I_3 = \frac{4}{5}$$
$$I_7 \big/ I_5 = \frac{6}{7}$$
$$I_9 \big/ I_7 = \frac{8}{9}$$
.
.
$$I_{2n+1} \big/ I_{2n-1} = \frac{2k}{2k+1}$$

وعند ضرب جميع الحدود في كل طرف نتوصل إلى المعادلة:

$$I_{2k+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2k+1}\, dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots\cdots\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}$$

قضيّة (ج): $\lim_{k\to\infty} I_{2k} \big/ I_{2k+1} = 1$

برهان: بما أنّ $0 \le \sin x \le 1$ لكل $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ فإنّ $(\sin x)^{2k+1} \le (\sin x)^{2k} \le (\sin x)^{2k-1}$ لكل $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. لذلك فإنّ: $0 < I_{2k+1} \le I_{2k} \le I_{2k-1}$. نقسم على I_{2k+1} فنحصل على المتباينة:

$$1 < I_{2k} \big/ I_{2k+1} \le I_{2k-1} \big/ I_{2k+1} = \frac{2k+1}{2k}$$

حسب نظرية الشطيرة نتوصل إلى أنّ $\lim_{k\to\infty} I_{2k} \big/ I_{2k+1} = 1$.

التوصل إلى صيغة Wallis : نبدأ من النتيجة الأخيرة التي توصلنا إليها وهي $\lim_{k\to\infty} I_{2k} \big/ I_{2k+1} = 1$. ومن النتيجتين (أ) و (ب) ينتج أنّ:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot\frac{2k-1}{2k}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}} = 1$$

لذلك فإنّ:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\cdots\cdot\frac{2k}{2k+1}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\cdots\cdot\frac{2k-1}{2k}}$$

وبتفصيل أكثر:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\cdots\cdot\frac{2k-2}{2k-3}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot\cdots\cdot2k}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\cdots\cdot(2k-1)}\right)^2\cdot\frac{1}{2k+1}$$

مما تقدّم فإنّ:

$$B_k = \frac{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot\cdots\cdot2k}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\cdots\cdot(2k-1)} = \frac{4^n\,(k!)^2}{(2k)!} = 4^k \Big/ \binom{2k}{k} = 4^k \Big/ C_{2k}^{k}$$

لذلك فإنّ:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{4^k\cdot(k!)^2}{(2k)!}\right)^2\cdot\frac{1}{2k+1}$$

وبصورة أخرى:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+1}\left(4^k \Big/ C_{2k}^{k}\right)^2$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot\cdots\cdots$$