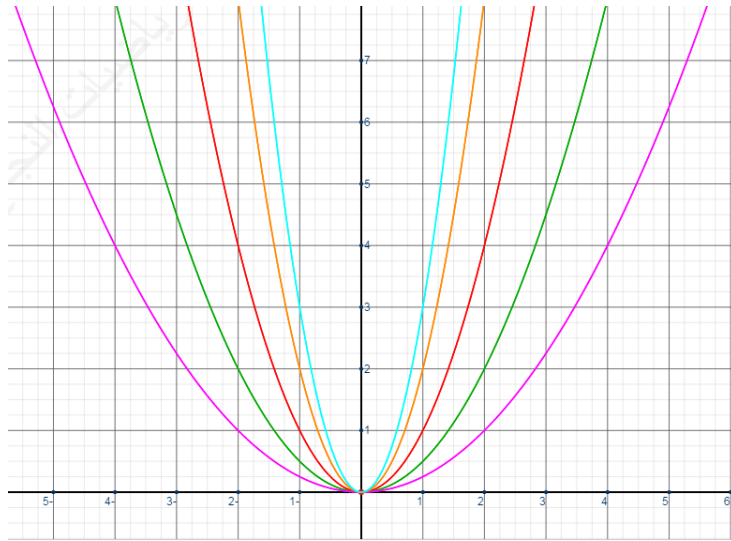


الدالة التربيعية

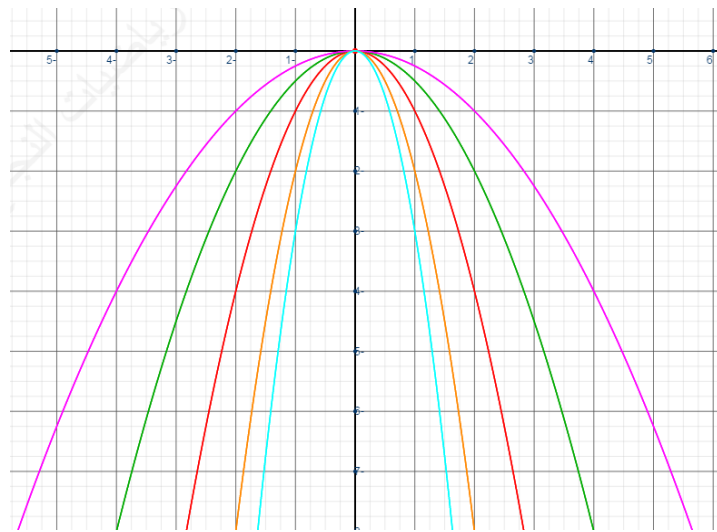
د. علي عثمان

أفترض أن القارئ قد سبق له وتعرف جيداً على الرسوم البيانية للدوال التربيعية ذات الصورة
 $f(x) = ax^2$

عندما يكون المعامل $a > 0$ فإن الرسم البيانية لدوال من هذا النوع كما نرى في الشكل (1):



وعندما يكون المعامل $a < 0$ فإن الرسم البيانية لدوال من هذا النوع كما نرى في الشكل (2):



سندرس من خلال هذه المادة الدوال التربيعية والمعادلات التربيعية بشكل عام.

الصيغة العامة للدالة التربيعية هي $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث أن $a \neq 0$ ، b و c ثوابت (بارامترات) وتسمى المعاملات: a هو معامل x^2 و b هو معامل x و c هو المعامل الحر، لأنه ليس معاملًا متغيرًا.

أثناء معالجة الدالة التربيعية والمعادلة التربيعية نفترض دائمًا أن معامل x^2 يختلف عن 0 سواء كُتبت أولم تُكتب.

أمثلة:

- | | |
|---|---|
| المعاملات هي: $a=1$ ، $b=5$ و $c=6$. | (1) $f(x) = x^2 + 5x + 6$ |
| المعاملات هي: $a=1$ ، $b=-3$ و $c=1$. | (2) $f(x) = x^2 - 3x + 1$ |
| المعاملات هي: $a=-1$ ، $b=\frac{4}{7}$ و $c=8$. | (3) $f(x) = -x^2 + \frac{4}{7}x + 8$ |
| المعاملات هي: $a=\frac{-1}{5}$ ، $b=\frac{4}{7}$ و $c=8$. | (4) $f(x) = \frac{-x^2}{5} + \frac{4}{7}x + 8$ |
| المعاملات هي: $a=\frac{5}{12}$ ، $b=\frac{3}{11}$ و $c=-\frac{8}{17}$. | (5) $f(x) = \frac{5x^2}{12} + \frac{3}{11}x - \frac{8}{17}$ |
| المعاملات هي: $a=-\frac{5}{8}$ ، $b=\frac{4}{7}$ و $c=0$. | (6) $f(x) = -\frac{5}{8}x^2 + \frac{4}{7}x$ |
| المعاملات هي: $a=4$ ، $b=-7$ و $c=0$. | (7) $f(x) = 4x^2 - 7x$ |
| المعاملات هي: $a=4$ ، $b=0$ و $c=-7$. | (8) $f(x) = 4x^2 - 7$ |
| المعاملات هي: $a=-1$ ، $b=0$ و $c=16$. | (9) $f(x) = -x^2 + 16$ |
| المعاملات هي: $a=4$ ، $b=1$ و $c=-7$. | (10) $f(x) = x + 4x^2 - 7$ |
- (يجب الاهتمام بترتيب التعبير الجبري).

$$f(x) = 15 - 3x + x^2 \quad (11) \quad \text{المعاملات هي: } a=1, b=-3, c=15.$$

(يجب الاهتمام بترتيب التعبير الجبري).

$$f(x) = 3x^2 + 4(5x - 2) \quad (12) \quad \text{المعاملات هي: } a=3, b=20, c=-8.$$

(يجب الاهتمام بفك الأقواس).

$$f(x) = 3x^2 + 4(x + 1)^2 \quad (13) \quad \text{المعاملات هي: } a=7, b=8, c=4.$$

(يجب الاهتمام بفك الأقواس).

$$f(x) = 3(x + 2)^2 - (x + 1)^2 \quad (14) \quad \text{المعاملات هي: } a=2, b=10, c=11.$$

(يجب الاهتمام بفك الأقواس).

الصيغة المختصرة للدالة التربيعية:

كل دالة ذات الصيغة $f(x) = a(x - m)^2 + k$ ، حيث أن $a \neq 0$ ، m و k ثوابت (بارامترات)، هي دالة تربيعية. الصيغة $f(x) = a(x - m)^2 + k$ تسمى الصيغة المختصرة للدالة التربيعية.

بعد فك الأقواس نحصل على الصيغة المكافئة: $f(x) = ax^2 - 2amx + am^2 + k$

وهي دالة تربيعية فيها معامل x^2 يساوي a ،

معامل x يساوي $-2am$ والعدد الحر (ليس معاملاً لمتغير) هو $am^2 + k$

تتوافق مع الصيغة العامة للدالة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$

حيث أن: $a=a$ ، $b=-2am$ و $c=am^2 + k$.

ملخص (1)

الصيغة $f(x) = a(x - m)^2 + k$ تسمى الصيغة المختصرة للدالة التربيعية.

$$f(x) = a(x - m)^2 + k = ax^2 + (-2am)x + (am^2 + k)$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{هي من الصيغة:}$$

$$\text{حيث أن: } a = a \quad \text{و} \quad b = -2am \quad \text{و} \quad c = am^2 + k.$$

تمرين: حوّل كل دالة ذات صيغة مختصرة إلى الصيغة العامة:

$$f(x) = -(x - 5)^2 + 30 \quad (3) \quad f(x) = 5(x - 3)^2 - 45 \quad (2) \quad f(x) = 3(x - 5)^2 + 4 \quad (1)$$

$$f(x) = -5(x + 4)^2 + 80 \quad (6) \quad f(x) = -5(x + 2)^2 + 4 \quad (5) \quad f(x) = 5(x + 4)^2 - 21 \quad (4)$$

التحويل من الصيغة العامة إلى الصيغة المختصرة:

مثال: حوّل الدالة $f(x) = x^2 + 8x - 10$ إلى الصيغة المختصرة.

حل: نريد تحويل الدالة إلى الصيغة $f(x) = a(x - m)^2 + k$. من الواضح حسب ملخص (1) أن:

$$a = 1, \quad -2am = 8, \quad \text{و} \quad am^2 + k = -10. \quad \text{وهذا يكافئ: } a = 1, \quad m = -4, \quad \text{و} \quad k = -10 - (-4)^2 = -26.$$

لذلك فإن الصيغة المختصرة للدالة هي: $f(x) = (x + 4)^2 - 26$.

(انتبه إلى أن: $(x^2 + 8x - 10) = (x + 4)^2 - 26$).

طريقة تحويل الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ إلى الصيغة المختصرة.

حل: نريد تحويل الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ إلى الصيغة $f(x) = a(x - m)^2 + k$.

من الواضح حسب ملخص (1) أن: $a = a$ و $-2am = b$ و $am^2 + k = c$.

$$\text{وهذا يكافئ: } a = a \quad \text{و} \quad m = -\frac{b}{2a} \quad \text{و} \quad k = c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\text{أي أن: } a = a \quad \text{و} \quad m = -\frac{b}{2a} \quad \text{و} \quad k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

لهذا فإن تحويل الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ إلى الصيغة المختصرة هو:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

ملخص (2):

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

نرمز: $\Delta = b^2 - 4ac$ (هذا الحرف Δ هو الحرف دلتا في اللغة اللاتينية).

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

باستعمال هذا الرمز نتوصل إلى:

Δ يسمى المميز للدالة التربيعية وللمعادلة التربيعية، لأنه يُحدّد عدد النقاط الصفرية للدالة التربيعية

(أي أن عدد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$). سنفهم هذا في البند القادم أثناء دراستنا لجذور المعادلة التربيعية.

تمارين تطبيقية: التحويل إلى الصيغة المختصرة

1. (مثال): حوّل الدالة $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ إلى الصيغة المختصرة.

$$\text{حل: نحسب المميز } \Delta = \frac{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}{16} = 0$$

$$\text{حسب القانون أعلاه: } f(x) = 4 \left(x - \frac{4}{8} \right)^2 - \frac{0}{16} = 4 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2$$

$$\text{أي أن الصيغة المختصرة لهذه الدالة هي: } f(x) = 4 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2$$

$$\text{يمكن أن نكتبها أيضًا } f(x) = (2x - 1)^2$$

2. (مثال): حوّل الدالة $f(x) = -9x^2 + 6x - 11$ إلى الصيغة المختصرة.

$$\text{حل: نحسب المميز } \frac{\Delta}{4a} = \frac{6^2 - 4 \cdot (-9) \cdot (-11)}{-36} = 10$$

$$\text{حسب القانون أعلاه: } f(x) = -9 \left(x + \frac{6}{-18} \right)^2 - 10 = -9 \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 - 10$$

أي أن الصيغة المختصرة لهذه الدالة هي: $f(x) = -9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - 10$.

يمكن أن نكتبها أيضًا $f(x) = -(3x - 1)^2 - 10$. يمكن الحل بطريقة مغايرة قليلًا على النحو التالي:

$$\begin{aligned} f(x) &= -9x^2 + 6x - 11 = -(9x^2 - 6x + 11) = -\left[9\left(x - \frac{6}{18}\right)^2 - \frac{(-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 11}{36}\right] \\ &= -\left[9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 10\right] = -9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - 10 \end{aligned}$$

3. حوّل الدالة $f(x) = x^2 + 6x - 1$ إلى الصيغة المختصرة.

4. حوّل الدالة $f(x) = x^2 - 8x + 15$ إلى الصيغة المختصرة.

5. حوّل الدالة $f(x) = -x^2 - 8x + 15$ إلى الصيغة المختصرة.

6. حوّل الدالة $f(x) = 3x^2 - 18x + 21$ إلى الصيغة المختصرة.

7. حوّل الدالة $f(x) = 16x^2 - 4x - 9$ إلى الصيغة المختصرة.

قانون جذور المعادلة التربيعية (إيجاد النقاط الصفرية للدالة التربيعية)

سنتعلّم كيف نجد جذور المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

نقوم بتحويل التعبير الجبري $ax^2 + bx + c$ إلى الصيغة المختصرة، حسب ملخص (2).

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

لهذا فإن:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

علينا الآن حل المعادلة: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$. نُميّز بين ثلاث حالات:

حالة أ: عندما $\Delta < 0$. في هذه الحالة الطرف الأيمن سالب، بينما الطرف الأيسر غير سالب لكونه تربيع عدد حقيقي، فلا يمكن حدوث تساوي لأي قيمة للمتغير x . لا يوجد أي جذر حقيقي للمعادلة.

حالة ب: عندما $\Delta = 0$. المعادلة في هذه الحالة هي: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$

وهي تكافئ المعادلة: $x + \frac{b}{2a} = 0$ يكافئ $x = -\frac{b}{2a}$.

أي أن للمعادلة جذر حقيقي واحد ووحيد. (يمكن القول للمعادلة جذر حقيقي مضاعف مرتين، لأننا يمكن أن نكتب المعادلة على النحو:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$$

ويمكن أن نقول: للمعادلة جذران متساويان. (توجد أهمية لهذه المصطلحات في مراحل متقدمة في الرياضيات).

حالة ج: عندما $\Delta > 0$. المعادلة في هذه الحالة هي: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ وهي تكافئ المعادلة:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ وهذا يكافئ } x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

أي أن للمعادلة جذرين حقيقيين مختلفين. جذرا المعادلة في هذه الحالة هما:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

لاحظ أن القانون الأخير يصح أيضًا في الحالتين (أ) و (ب). فعندما يكون $\Delta < 0$ فإن $\sqrt{\Delta}$ غير معرف (ليس عددًا حقيقيًا)، وعندما يكون $\Delta = 0$ فإن $\sqrt{\Delta} = 0$ لذلك فعندما تعوّض هذا في القانون الأخير ستلاحظ أن:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

ملخص (3):

قانون جذور المعادلة التربيعية: $ax^2 + bx + c = 0$ (الدستور لحل المعادلة التربيعية)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{حيث أن } \Delta = b^2 - 4ac \text{ (المميز)}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{يمكن أن نكتب:}$$

$$\text{عندما } \Delta > 0 \text{ للمعادلة جذران حقيقيان وهما } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{عندما } \Delta = 0 \text{ للمعادلة جذر حقيقي واحد وهو } x = -\frac{b}{2a} \text{ (جذر مضاعف مرتين).}$$

$$\text{عندما } \Delta < 0 \text{ لا يوجد للمعادلة أي جذر حقيقي.}$$

هل اتضح سبب تسمية Δ بالمميز! نعم: حسب تعريف عدد جذور المعادلة التربيعية وحسبه نعرف عدد النقاط الصفرية للدالة التربيعية.

تمارين تطبيقية: حل معادلة تربيعية حسب القانون (الدستور)

مجموعة (1): حل كل واحدة من المعادلات الآتية حسب القانون:

$$1. \text{ مثال: } x^2 + x - 1 = 0$$

$$\text{حل: نحسب المميز } \Delta = 1 - 4 \cdot (-1) = 5 \text{ للمعادلة جذران (حلان) وهما:}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 + 5x - 14 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + x - 12 = 0 \quad (2)$$

$$2x^2 - 3x - 10 = 0 \quad (7)$$

$$x^2 + 5x - 11 = 0 \quad (6)$$

$$x^2 + 7x + 4 = 0 \quad (5)$$

$$x^2 + 5x = 0 \quad (10)$$

$$6x^2 - 17x - 3 = 0 \quad (9)$$

$$5x^2 + 4x - 7 = 0 \quad (8)$$

أجوبة:

(2) $x_1 = 4$ و $x_2 = -3$	(3) $x_1 = 2$ و $x_2 = -7$	(4) $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ و $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$
(5) $x_1 = \frac{-7+\sqrt{33}}{2}$ و $x_2 = \frac{-7-\sqrt{33}}{2}$	(6) $x_1 = \frac{-5+\sqrt{69}}{2}$ و $x_2 = \frac{-5-\sqrt{69}}{2}$	(7) $x_1 = \frac{3+\sqrt{89}}{4}$ و $x_2 = \frac{3-\sqrt{89}}{4}$
(8) $x_1 = \frac{-2+\sqrt{39}}{5}$ و $x_2 = \frac{-2-\sqrt{39}}{5}$	(9) $x_1 = 3$ و $x_2 = -\frac{1}{6}$	

مجموعة (2): حل كل واحدة من المعادلات الآتية حسب القانون:

1. مثال: $x^2 + x + 1 = 0$.

حل: نحسب المميز $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 = -3 < 0$. بما أن المميز سالب فلا توجد جذور حقيقية للمعادلة.

2. مثال: $3x^2 + 5x + 7 = 0$.

حل: نحسب المميز $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = -59 < 0$. بما أن المميز سالب فلا توجد جذور حقيقية للمعادلة.

3. مثال: $x^2 - 24x + 144 = 0$.

حل: نحسب المميز $\Delta = 24^2 - 4 \cdot 1 \cdot 144 = 0$. بما أن المميز يساوي 0 فإن للمعادلة حل واحد وهو

$$x_1 = -\frac{-24}{2} = 12$$

يمكن أن نقول إن العدد 12 هو جذر للمعادلة وهو مضاعف مرتين وذلك لأن

$$(x - 12)^2 = 0$$

المعادلة مكافئة للمعادلة:

$$x^2 - 12x + 40 = 0 \quad (6)$$

$$x^2 - 12x + 37 = 0 \quad (5)$$

$$x^2 - 12x + 36 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{9}{4}x^2 + 21x + 49 = 0 \quad (9)$$

$$-9x^2 + 12x - 5 = 0 \quad (8)$$

$$-9x^2 + 12x - 4 = 0 \quad (7)$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \quad (12)$$

$$-\frac{9}{4}x^2 + 21x - 49 = 0 \quad (11)$$

$$\frac{9}{4}x^2 + 21x + 51 = 0 \quad (10)$$

أجوبة:

6.4 5. لا يوجد 6. لا يوجد 7. $\frac{2}{3}$ 8. لا يوجد

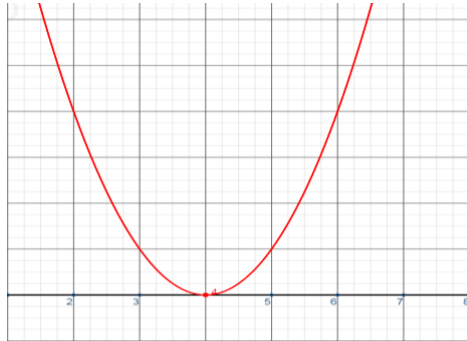
9. $-4\frac{2}{3}$ 10. لا يوجد 11. $4\frac{2}{3}$ 12. لا يوجد.

القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة التربيعية

الحالة الأولى: عندما يكون معامل x^2 موجباً

مثال (1): تمعّن في الدالة $f(x) = (x - 4)^2$.

لأي قيمة للمتغير x تكون الدالة سالبة؟ ما هي أصغر قيمة للدالة؟



الجواب: لا يمكن أن تكون للدالة قيم سالبة لأن مربع كل عدد حقيقي هو دائماً عدد موجب أو صفر.

$$a^2 \geq 0 \text{ لكل } a \text{ و } a^2 > 0 \text{ لكل } a \neq 0$$

$$a = 0 \Leftrightarrow a^2 = 0 \text{ و}$$

$$x=4 \Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow (x-4)^2=0 \text{ لكل } x \text{ } f(x)=(x-4)^2 \geq 0$$

لذلك فإن القيمة الصغرى للدالة $f(x)=(x-4)^2$ هي 0 وتحصل الدالة عليها عند تعويض العدد 4 بدل المتغير.

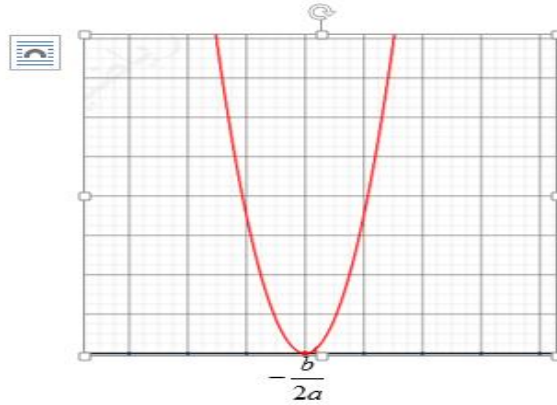
نقول: القيمة الصغرى للدالة $f(x)=(x-4)^2$ هي 0 ونقطة النهاية الصغرى هي $x=4$.

يمكن كتابة هذا بالرموز: $f_{\min} = 0$ و $x_{\min} = 4$.

النقطة في المستوى التي إحداثياتها $(4,0)$ هي نقطة القعر للدالة $f(x)=(x-4)^2$ ، لأنها أوطأ نقطة موجودة على الرسم البياني للدالة. تسمى أيضاً نقطة الرأس (٦٦٦٦٦٦٦٦).

$$\text{مثال (2): تمعن في الدالة } f(x) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

ما هي أصغر قيمة للدالة وما هي نقطة النهاية الصغرى؟



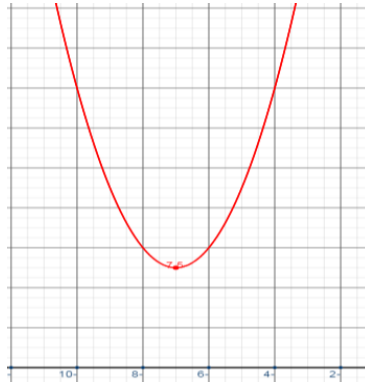
$$x = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \text{ لكل } x \text{ } f(x) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$$

لذلك فإن القيمة الصغرى للدالة $f(x) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ هي 0 وتحصل الدالة عليها عندما $x = -\frac{b}{2a}$

النقطة $x = -\frac{b}{2a}$ هي نقطة النهاية الصغرى. نكتب: $f_{\min} = 0$ و $x_{\min} = -\frac{b}{2a}$.

مثال (3): تمعّن في الدالة $g(x) = (x+7)^2 + 5$.

ما هي أصغر قيمة للدالة وما هي نقطة النهاية الصغرى؟



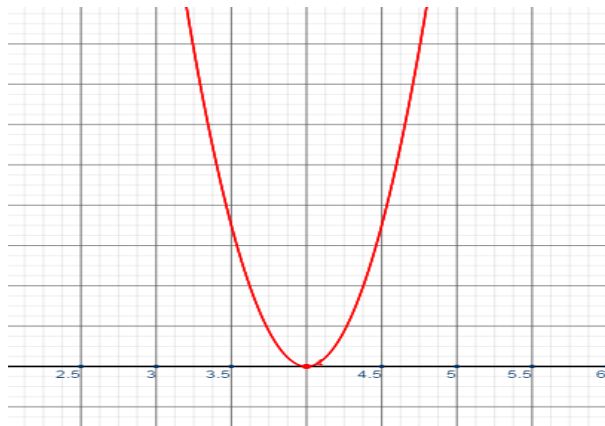
واضح أن هذه الدالة تزيد بـ 5 عن الدالة $f(x) = (x+7)^2$. بما أن $f_{\min} = 0$ و $x_{\min} = -7$.

لذلك فإن: $g_{\min} = 5$ و $x_{\min} = -7$. نقطة القعر (أو نقطة الرأس) هي $(-7, 5)$.

(الدالتان تحصلان على القيمة الصغرى في نفس النقطة. من الناحية البيانية فإن الدالة

$g(x) = (x+7)^2 + 5$ تنتج عن إزاحة الدالة $f(x) = (x+7)^2$ بـ 5 وحدات إلى أعلى).

مثال (4): تمعّن في الدالة $f(x) = 7(x-4)^2$. ما هي أصغر قيمة للدالة؟

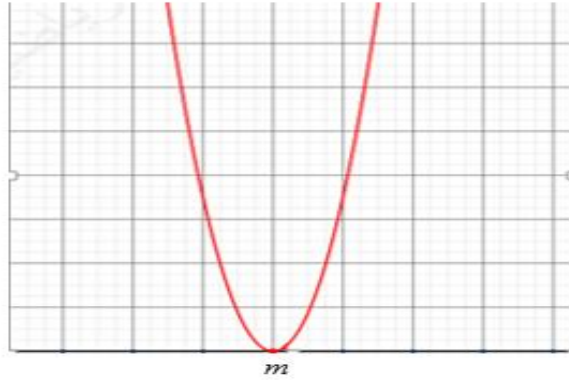


من الواضح أن $7(x-4)^2 \geq 0$ لكل x . $x=4 \Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow 7(x-4)^2=0$.

لذلك فإن القيمة الصغرى للدالة $f(x) = 7(x-4)^2$ هي 0 وتحصل الدالة عليها عند تعويض

العدد 4 بدل المتغير. بالرموز: $f_{\min} = 0$ و $x_{\min} = 4$. نقطة القعر هي $(4, 0)$.

مثال (5): تمعّن في الدالة $f(x) = a(x - m)^2$ ، حيث أن $a > 0$ ، ما هي أصغر قيمة للدالة؟

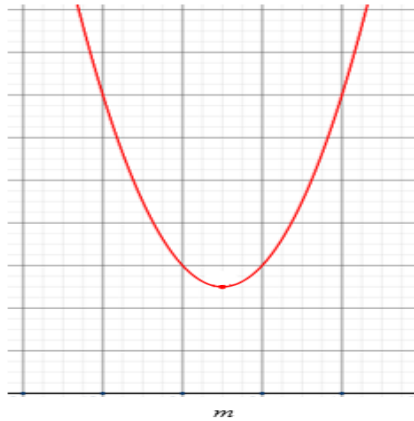


من الواضح أن $(x - m)^2 \geq 0$ لكل x . بما أن $a > 0$ فإن $a(x - m)^2 \geq 0$. لذلك فإن القيمة الصغرى للدالة هي 0 وتحصل عليها الدالة عندما $a(x - m)^2 = 0 \Leftrightarrow x - m = 0 \Leftrightarrow x = m$.

بالرموز: $f_{\min} = 0$ و $x_{\min} = m$.

نقطة القعر هي $(m, 0)$.

مثال (6): تمعّن في الدالة $g(x) = a(x - m)^2 + k$ ، حيث أن $a > 0$ ما هي أصغر قيمة للدالة؟



هذه الدالة نتجت من إزاحة الدالة $f(x) = a(x - m)^2$ بمقدار k وحدات بموازية محور y .

لذلك فإن القيمة الصغرى لها هي k وتحصل الدالة عليها في النقطة $x = m$.

بالرموز: $g_{\min} = k$ و $x_{\min} = m$. نقطة القعر هي (m, k) .

نتيجة من المثال (6): إذا كان $a > 0$ فإن الدالة $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ تحصل على القيمة

الصغرى في النقطة $x = -\frac{b}{2a}$ وقيمتها الصغرى تساوي $-\frac{\Delta}{4a}$. (هذا ينتج مباشرة من مثال (6)

عندما نستبدل m بـ $-\frac{b}{2a}$ ، ونستبدل k بـ $-\frac{\Delta}{4a}$. نقطة القعر للدالة هي $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

نظرية:

إذا كان $a > 0$ فإن الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ تحصل على القيمة الصغرى في النقطة

$$x = -\frac{b}{2a} \text{ وقيمتها الصغرى تساوي } -\frac{\Delta}{4a}.$$

يمكن استنتاج هذه النظرية من الصيغة المختصرة للدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ وهي

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \text{ ومن النتيجة السابقة.}$$

عندما يكون $a > 0$ فإن: $f_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$ و $x_{\min} = -\frac{b}{2a}$

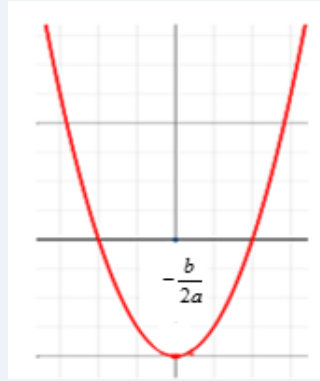
نقطة القعر (أو نقطة الرأس) هي $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

اقترح هام: لاحظ أن: عندما يكون $a > 0$ فإن $f_{\min} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. قد تسهل هذه الملاحظة

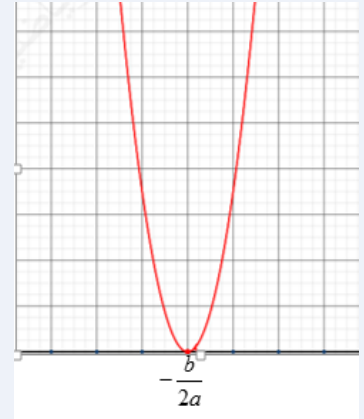
عملية حساب القيمة الصغرى لأنها تقلل من القوانين التي علينا تذكرها.



$$\Delta < 0, a > 0$$



$$\Delta > 0, a > 0$$



$$\Delta = 0, a > 0$$

تمارين على القيمة الصغرى للدالة التربيعية

جد القيمة الصغرى والنقطة التي تحصل الدالة فيها على القيمة الصغرى وسجل احداثي نقطة

القعر (رأس الدالة) $(x_{\min}, f_{\min})$

$$f(x) = (2x - 5)^2 + 4 \quad (3) \quad f(x) = 2(x + 5)^2 - 3 \quad (2) \quad f(x) = x^2 + 1 \quad (1)$$

$$f(x) = (x + 3)^2 + (x - 3)^2 \quad (6) \quad f(x) = 6x^2 - 14x + 1 \quad (5) \quad f(x) = 4x^2 + 8x + 9 \quad (4)$$

أجوبة: (نقاط القعر)

(2.5, 4)	3)	(-5, -3)	2)	(0, 1)	1)
(	(	(	(	(	(
(0, 18)	6)	(7/6, -7 1/6)	5)	(-1, 5)	4)
(	(	(	(	(	(

سؤال: هل توجد قيمة عظمى للدالة $f(x) = x^2 + 1$ ؟

جواب: نلاحظ: $f(10) = 10^2 + 1 = 101$ ، $f(10^2) = 10^4 + 1 = 10001$ ، $f(10^3) = 10^6 + 1 = 1000001$ ،
.....

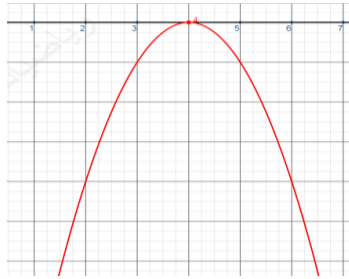
نرى أن قيم الدالة في تزايد كبير، فتحصل الدالة على قيم أكبر من أي قيمة نفرضها. فهل تحصل الدالة على قيمة أكبر من 2^{1000} ؟ نعم بالتأكيد. مثلاً: $f(2^{500}) = 2^{1000} + 1$.
الدالة تحصل على قيم أكبر من أي عدد نختار. الدالة تؤول إلى ما لا نهاية. فلا توجد لها قيمة عظمى.

ملاحظة: إذا كان معامل x^2 موجباً فإن الدالة التربيعية تحصل على قيم أكبر من أي عدد نختاره مهما كان كبيراً. نقول هذا بكلمات أخرى: الدالة تتباعد (تزايد) إلى ما لا نهاية.

الحالة الثانية: عندما يكون معامل x^2 سالباً

مثال (7): تمعن في الدالة $g(x) = -(x-4)^2$. لأي قيمة للمتغير x تكون الدالة موجبة؟

ما هي أكبر قيمة للدالة؟



الجواب: لا يمكن أن تكون الدالة موجبة لأن مربع كل عدد حقيقي هو دائماً عدد موجب أو صفر، فالضاد هو عدد سالب أو 0. لذلك فإن أكبر قيمة للدالة هي 0 وتحصل عليها الدالة في النقطة $x=4$. نكتب هذا: $g_{\max} = 0$ و $x_{\max} = 4$.

من الناحية البيانية فإن الرسم البياني للدالة $g(x) = -(x-4)^2$ يماثل الرسم البياني للدالة $f(x) = (x-4)^2$ ، بالنسبة لمحور x . النقطة (4, 0) هي النقطة المشتركة لكليهما. هي نقطة القعر للدالة $f(x) = (x-4)^2$ ، لهذا فهي نقطة القمة للدالة $g(x) = -(x-4)^2$.

مثال (8): تمعن في الدالة $f(x) = a(x-m)^2$ ، حيث أن $a < 0$ ،

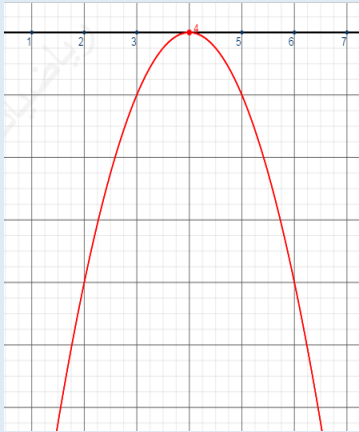
ما هي أكبر قيمة للدالة؟

من الواضح أن $(x-m)^2 \geq 0$ لكل x . بما أن $a < 0$ فإن: $a(x-m)^2 \leq 0$ لكل x . لذلك فإن القيمة العظمى للدالة هي 0 وتحصل عليها الدالة عندما $x=m \Leftrightarrow x-m=0 \Leftrightarrow a(x-m)^2=0$. بالرموز: $f_{\max}=0$ و $x_{\max}=m$. النقطة $(m,0)$ هي نقطة القمة للدالة $f(x)=a(x-m)^2$.

مثال (9): تمعّن في الدالة $g(x)=a(x-m)^2+k$ ، حيث أن $a < 0$ ،

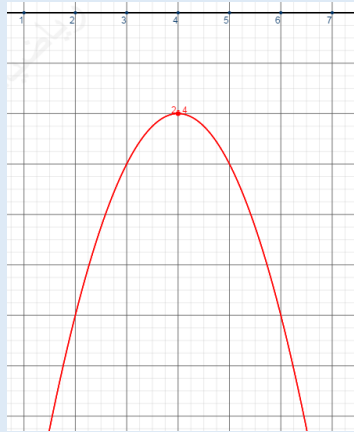
ما هي أكبر قيمة للدالة؟

هذه الدالة نتجت من إزاحة الدالة $f(x)=a(x-m)^2$ بمقدار k وحدات بموازية محور y . لذلك فإن القيمة العظمى للدالة هي k وتحصل عليها الدالة عندما $x=m \Leftrightarrow x-m=0 \Leftrightarrow a(x-m)^2=0$. بالرموز: $g_{\max}=k$ و $x_{\max}=m$. النقطة (m,k) هي نقطة القمة للدالة $g(x)=a(x-m)^2+k$



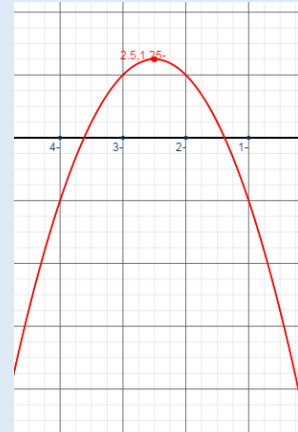
$$f(x) = a(x-m)^2$$

$$a < 0, k=0$$



$$g(x) = a(x-m)^2 + k$$

$$a < 0, k < 0$$



$$g(x) = a(x-m)^2 + k$$

$$a < 0, k > 0$$

نتيجة: إذا كان $a < 0$ فإن الدالة $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ تحصل على القيمة العظمى في النقطة $x = -\frac{b}{2a}$ وقيمتها العظمى تساوي $-\frac{\Delta}{4a}$.

(هذا ينتج مباشرة من مثال (9) عندما نستبدل m بـ $-\frac{b}{2a}$ ، ونستبدل k بـ $-\frac{\Delta}{4a}$).

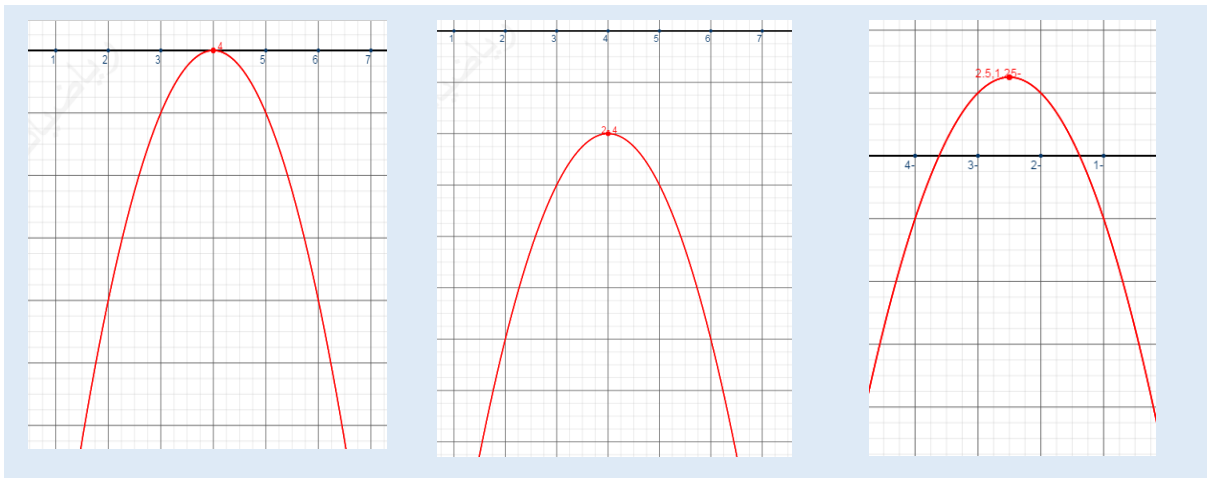
نظرية:

إذا كان $a < 0$ فإن الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ تحصل على القيمة العظمى في النقطة $x = -\frac{b}{2a}$ وقيمتها العظمى تساوي $-\frac{\Delta}{4a}$. نقطة القمّة (أو نقطة الرأس ٦١٦٦٦٦) هي $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

يمكن استنتاج هذه النظرية من الصيغة المختصرة للدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$

وهي $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ ومن النتيجة السابقة. عندما يكون $a < 0$ فإن: $f_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$ و $x_{\max} = -\frac{b}{2a}$ ، نقطة القمّة (أو نقطة الرأس ٦١٦٦٦٦) هي $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

ملخص شكل الرسم البياني للدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ عندما $a < 0$ بالنسبة لمحور x .



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\Delta = 0, a < 0$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\Delta < 0, a < 0$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\Delta > 0, a < 0$$

اقتراح هام: لاحظ: عندما يكون $a < 0$ فإن $f_{\max} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. قد تسهل هذه الملاحظة

عملية حساب القيمة العظمى لأنها تقلل من القوانين التي علينا تذكرها.

تمارين على القيمة العظمى للدالة التربيعية

جد القيمة العظمى والنقطة التي تحصل الدالة فيها على القيمة العظمى وسجل احداثي نقطة

القيمة (رأس الدالة) $(x_{\max}, f_{\max})$

$f(x) = -2(x+5)^2 - 3$	(2)	$f(x) = -x^2 + 8$	(1)
$f(x) = -4x^2 + 8x + 9$	(4)	$f(x) = -(2x-5)^2 + 4$	(3)
$f(x) = -x^2 - 6x$	(6)	$f(x) = -6x^2 + 14x - 10$	(5)
$f(x) = 100 - 7(3x-7)^2$	(8)	$f(x) = -2(x+3)^2 + (x-3)^2$	(7)

أجوبة: (نقاط القيمة)

(1, 13)	(4)	(2.5, 4)	(3)	(-5, -3)	(2)	(0, 8)	(1)
$\left(\frac{7}{3}, 100\right)$	(8)	(-9, 72)	(7)	(-3, 9)	(6)	$\left(\frac{7}{6}, -1\frac{5}{6}\right)$	(5)

ملخص 4

الدالة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$

نقطة الرأس للدالة هي النقطة $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

إذا كان $a > 0$ فإن نقطة الرأس هي نقطة القعر للدالة. للدالة قيمة صغرى وليس لها قيمة عظمى

إذا كان $a < 0$ فإن نقطة الرأس هي نقطة القمة للدالة. للدالة قيمة عظمى وليس لها قيمة صغرى

تمارين متنوعة (رأس الدالة، القيمة العظمى والقيمة الصغرى)

1. (مثال): معلوم أن النقطة $(1, 3)$ هي رأس الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ وأن $f(3) = 4$ ، جد a, b, c . هل نقطة الرأس هي نقطة قعر؟ أم هي نقطة قمة؟ علل!

حل: بما أن النقطة $(1, 3)$ هي رأس الدالة فإن الصيغة المختصرة للدالة هي $f(x) = a(x-1)^2 + 3$. بما أن $f(3) = 4$ ،

لذلك فإن $f(3) = a(3-1)^2 + 3 = 4 \Leftrightarrow 4a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$. لذلك فإن: $f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 3$. لإيجاد a, b, c نحول الدالة إلى الصيغة العامة عن طريق فك الأقواس:

$f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 3 = \frac{1}{4}(x^2 - 2x + 1) + 3 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 3\frac{1}{4} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 3\frac{1}{4}$ هي: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 3\frac{1}{4}$ لهذا فإن: $a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}, c = 3\frac{1}{4}$.

بما أن $a > 0$ فإن نقطة الرأس هي نقطة قعر.

2. معلوم أن النقطة $(2, 7)$ هي رأس الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ وأن $f(-1) = 16$ ، جد a, b, c . هل نقطة الرأس هي نقطة قعر؟ أم هي نقطة قمة؟ علل!

3. معلوم أن النقطة $(3, 24)$ هي رأس الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ وأن $f(-2) = -1$ ، جد a, b, c . هل نقطة الرأس هي نقطة قعر؟ أم هي نقطة قمة؟ علل!

4. معلوم أن النقطة $\left(-\frac{5}{6}, -5\frac{11}{12}\right)$ هي رأس الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ وأن $f(1) = -16$ ،

جد a, b, c . هل نقطة الرأس هي نقطة قعر؟ أم هي نقطة قمة؟ علل!

5. النقطة $(1, 5)$ هي نقطة القعر للدالة $f(x)$ ، والنقطة $(14, 1)$ هي نقطة القمة للدالة

$g(x)$. معلوم أن النقطة $\left(\frac{5}{2}, 11\frac{3}{4}\right)$ هي إحدى نقطتي التقاطع بين الدالتين. جد الصيغة

العامة لكل دالة من الدالتين وجد نقطة التقاطع الثانية بينهما. جد نقطتي تقاطع الدالة $g(x)$

مع محور x وارسم الدالتين في نفس هيئة المحاور.

جواب: $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$ و $g(x) = -x^2 + 2x + 13$ (أكمل باقي التفاصيل).

6. النقطة $(-3, -5)$ هي نقطة القعر للدالة $f(x)$ ، والنقطة $(-3, 15)$ هي نقطة القمة للدالة

$g(x)$. معلوم أن النقطة $(-5, 3)$ هي إحدى نقطتي التقاطع بين الدالتين. جد الصيغة

العامة لكل دالة من الدالتين وجد نقطة التقاطع الثانية بينهما. جد نقطتي تقاطع الدالة $g(x)$

مع محور x وارسم الدالتين في نفس هيئة المحاور.

7. عددان مجموعهما 20. احسب أكبر قيمة ممكنة لحاصل ضربهما.

حل: نرمز لأحد العددين بالحرف x . بما أن مجموع العددين يساوي 20 فإن العدد الآخر

يساوي $20 - x$. الدالة $f(x) = x(20 - x)$ تمثل حاصل ضرب العددين عندما يكون أحدهما

x . نلاحظ أنها دالة تربيعية فهي تساوي $f(x) = 20x - x^2$ ، أي أن $f(x) = -x^2 + 20x$.

للدالة قيمة عظمى لأن معامل x^2 عدد سالب.

واضح أن: $x_{\max} = 10$ و $f_{\max} = 100$. معنى هذا أن أكبر قيمة لحاصل ضرب عددين

مجموعهما 20 هي 100. ويحدث هذا عندما يكون العددان متساويين.

8. عددان مجموعهما a . احسب أكبر قيمة ممكنة لحاصل ضربهما.

إرشاد: نفس مراحل حل المثال السابق. استبدل العدد 20 بـ a .

$$\text{الجواب: } x_{\max} = \frac{a}{2} \text{ و } f_{\max} = \frac{a^2}{4}$$

9. عند إطلاق جسم عمودياً إلى أعلى بسرعة بدائية 100 متر في الثانية، فإن سرعته تأخذ بالتناقص بسبب الجاذبية (بما أن الجذب إلى أسفل فإن التسارع سلبي. في العلوم الطبيعية يقدرون تسارع الجاذبية g أنه يساوي بالتقريب 9.8. تسارع الجاذبية السلبي يساوي $-g$). قانون المسافة التي يقطعها الجسم إلى أعلى هو: $s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ ، حيث أن t يرمز للزمن (بالثواني) و v_0 يرمز للسرعة البدائية للإطلاق. ما هو أقصى ارتفاع عن مكان الإطلاق يصل إليه الجسم؟

حل: نرمز لارتفاع الجسم عن مكان الإطلاق بعد t ثوانٍ بـ $f(t)$. حسب المعطيات وحسب قانون المسافة فإن: $f(t) = 100t - \frac{1}{2}(9.8)t^2$. وهي تساوي

$$f(t) = -\frac{1}{2}(9.8)t^2 + 100t$$

وهي دالة تربيعية تحصل على قيمة عظمى: $t_{\max} = \frac{100}{9.8} \approx 10.2$ و $f_{\max} \approx 510$.

أي أن أقصى ارتفاع (عن مكان الإطلاق) يصل إليه الجسم يساوي 510 أمتار (بالتقريب)، ويحدث ذلك بعد حوالي 10 ثوانٍ من الإطلاق.

ملاحظة: طريقة أخرى للحل تعتمد على قانون السرعة. سرعة الجسم بعد t ثوانٍ تساوي $v(t) = v_0 - g \cdot t$. يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع عندما تصبح سرعته صفراً. بعدها يباشر الجسم بالسقوط إلى أسفل. متى تصبح السرعة صفراً؟

الجواب:

عندما $v_0 - g \cdot t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{g}$. حسب معطيات المسألة، عندما $t = \frac{100}{9.8} \approx 10.2$.

نعوض في قانون المسافة فنحصل على 510 أمتار بالتقريب، هو الارتفاع الأقصى الذي يصل إليه الجسم.

$$(\text{القانون العام بالنسبة للمسألة: } t_{\max} = \frac{v_0}{g} \text{ و } f_{\max} \approx \frac{v_0^2}{2g}).$$

10. مثلث قائم مجموع ضلعيه المتعامدين 50 وحدة. كم هو أكبر طول ممكن لوتره؟
إرشاد: اعتمد على نظرية فيثاغورس. الطول أكبر ما يمكن يكافئ مربع الطول أكبر ما يمكن.

11. دائرتان متماستان من الخارج، البعد بين مركزيهما يساوي 18 وحدة. كم هو أصغر مجموع ممكن لمساحتهما؟
(الجواب = 162π).

12. مستطيل محيطه يساوي 60 وحدة. كم تساوي مساحة المستطيل على الأكثر؟
إرشاد: نرمز لأحد بُعدي المستطيل بالحرف x . واضح أن مجموع البعدين يساوي 30. لهذا فإن البعد الثاني يساوي $30 - x$. نرمز بـ $f(x) = x(30 - x)$. هذه الدالة تمثل مساحة المستطيل الذي أحد بُعديه x . هي دالة تربيعية تحصل على قيمة عظمى. (يكون المستطيل أكبر ما يمكن بالمساحة عندما يتساوى بُعدها، أي عندما يكون مربعًا. أكد هذا!)

13. مربعان مجموع ضلعيهما 100 وحدة. كم يجب أن يكون طول ضلع كل منهما لكي يكون مجموع مساحتهما أصغر ما يمكن؟ اشرح

14. مثلث قائم مجموع ضلعيه المتعامدين m وحدة. كم هو أكبر طول ممكن لوتره؟

تحليل صيغة تربيعية إلى العوامل (العملة):

أمثلة:

1. أمامك التعبير الجبري $x^2 + 8x$. من السهل أن نؤكد أن $x^2 + 8x = x(x + 8)$. نرى أن هذا التعبير الجبري تحلل إلى حاصل ضرب عاملين كل منهما هو تعبير جبري خطي (أي تعبير جبري من الدرجة الأولى) وهما x و $x + 8$.

2. يمكن أن نحلل التعبير الجبري $5x^2 - 9x$ إلى حاصل ضرب عاملين من الدرجة الأولى على النحو التالي: $x(5x - 9)$ ، تحلل إلى حاصل ضرب العاملين x و $5x - 9$. ويمكن أيضًا أن نكتبه $5x\left(x - \frac{9}{5}\right)$ ، نكون قد حللناه إلى حاصل ضرب العاملين $5x$ و $x - \frac{9}{5}$ وهما أيضًا تعبيران جبريان من الدرجة الأولى.

3. كيف نحلل التعبير الجبري التربيعي $x^2 - 9$ ؟ هذا التعبير يساوي $x^2 - 3^2$. نستعين بقانون تحليل الفرق بين مربعين فنكتب: $x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$.

4. كيف نحلل التعبير الجبري التربيعي $x^2 - 7$ ؟ هذا التعبير يساوي $x^2 - (\sqrt{7})^2$. نستعين بقانون تحليل الفرق بين مربعين فنكتب: $x^2 - (\sqrt{7})^2 = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$.

5. كيف نحلل التعبير الجبري التربيعي $5x^2 - 17$ ؟ هذا التعبير يساوي $(\sqrt{5}x)^2 - (\sqrt{17})^2$. نستعين بقانون تحليل الفرق بين مربعين فنكتب:

$$(\sqrt{5}x)^2 - (\sqrt{17})^2 = (\sqrt{5}x - \sqrt{17})(\sqrt{5}x + \sqrt{17})$$

6. كيف نحلل التعبير الجبري التربيعي $(4x - 3)^2 - 49$ ؟

هذا التعبير يساوي $(4x - 3)^2 - (7)^2$ نستعين بقانون تحليل الفرق بين مربعين فنكتب:

$$(4x - 3)^2 - (7)^2 = (4x - 3 - 7)(4x - 3 + 7) \\ = (4x - 11)(4x + 4)$$

استعن بالأمثلة السابقة لحل التمارين الآتية:

تمارين:

حلل للعوامل كل واحد من التعابير الجبرية التربيعية (اكتب كل تعبير جبري تربيعي كحاصل ضرب لتعبيرين جبريين من الدرجة الأولى)

$9x^2 - 25$	(د)	$3x^2 - 40x$	(ج)	$7x^2 + 11x$	(ب)	$x^2 + 8x$	(أ)
			(		(		
$(5x - 2)^2 - 1$	(ح)	$12x^2 - 23$	(ز)	$7x^2 - 8$	(و)	$16x^2 - 81$	(هـ)
	(						
				$7(8x - 3)^2 - 21$	(ي)	$(8x - 3)^2 - 4$	(ط)
							(

لتحليل التعبير الجبري التربيعي ذي الصيغة $x^2 + bx + c$ للعوامل (عندما $bc \neq 0$)، نبحث عن عددين p و q بحيث أن $x^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$ لكل x .
 بما أن $(x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq$ فإن التساوي لكل x يتم إذا وفقط إذا تساوت المعاملات على التناظر. أي يجب أن يتحقق: $p + q = b$ وأيضاً $pq = c$.

مثال: حلل للعوامل: $x^2 + 7x + 10$.

نبحث عن عددين حاصل ضربهما 10 ومجموعهما 7. من السهل أن نُخَمِّن (نحزر) العددين 5 و 2.
 لذلك فإن: $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$. (البحث عن العددين تم بين عوامل العدد 10).

مثال: حلل للعوامل: $x^2 + 3x - 10$.

نبحث عن عددين حاصل ضربهما -10 ومجموعهما 3 . من السهل أن نُخَمِّن (نحزر) العددين 5 و -2 .

لذلك فإن: $x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$. (البحث عن العددين تمّ بين عوامل العدد 10).

تمارين: حل للعوامل أفحص جوابك

$x^2 + 8x + 15$	(3)	$x^2 + 4x + 3$	(2)	$x^2 + 3x + 2$	(1)
$x^2 + 2x - 15$	(6)	$x^2 - 2x - 15$	(5)	$x^2 + 16x + 15$	(4)
$x^2 + 11x + 24$	(9)	$x^2 - 11x + 24$	(8)	$x^2 - 14x - 15$	(7)
$x^2 + 10x - 24$	(12)	$x^2 - 2x - 24$	(11)	$x^2 + 10x + 24$	(10)

تحليل التعبير الجبري التربيعي ذي الصيغة $ax^2 + bx + c$ للعوامل
(عندما $a \neq 1$ و $bc \neq 0$)

مثال: نريد تحليل التعبير الجبري $6x^2 + 19x + 15$

$$6x^2 + 19x + 15 = \frac{1}{6}(6^2 x^2 + 19 \cdot (6x) + 90) = \frac{1}{6}((6x)^2 + 19 \cdot (6x) + 90)$$

(ضربنا كل حدّ في 6 وقسمنا المجموع على 6 .)

$$6x^2 + 19x + 15 = \frac{1}{6}(t^2 + 19t + 90) \text{ نستخدم } t \text{ بـ } 6x \text{ بهذا يصبح}$$

نبحث عن عددين حاصل ضربهما 90 ومجموعهما 19 . واضح أنهما 10 و 9 .

$$6x^2 + 19x + 15 = \frac{1}{6}(t^2 + 19t + 90) = \frac{1}{6}(t + 9)(t + 10) \text{ لذلك فإن:}$$

الآن نعوض بالعكس، فنستبدل t بـ $6x$.

$$6x^2 + 19x + 15 = \frac{1}{6}(6x + 9)(6x + 10) \text{ نتوصل الى التحليل:}$$

يمكن أن نكتفي بهذه الصيغة،

$$6x^2 + 19x + 15 = (2x + 3)(3x + 5) \text{ ويمكن أن نبسطها أكثر لتصبح:}$$

وصف الطريقة بشكل عام:

نريد تحليل التعبير الجبري $ax^2 + bx + c$

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(a^2x^2 + b \cdot (ax) + ac) = \frac{1}{a}((ax)^2 + b \cdot (ax) + ac)$$

(ضربنا كل حد في a وقسمنا المجموع على a .)

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(t^2 + bt + ac) \text{ نستبدل (نعوض) } ax \text{ بـ } t. \text{ بهذا يصبح}$$

نبحث عن عددين حاصل ضربهما ac ومجموعهما b . نفرض أننا نجحنا في إيجادهما، نرمز لهما

$$p \text{ و } q. \text{ لذلك فإن: } \frac{1}{a}(t^2 + bt + ac) = \frac{1}{a}(t + p)(t + q)$$

الآن نعوض بالعكس، فنستبدل t بـ ax . نتوصل الى التحليل:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(ax + p)(ax + q) \text{ يمكننا أن نكتفي بهذا التحليل، ويمكننا إخراج}$$

عوامل عددية مشتركة والاختصار، كما في المثال السابق. يمكننا أيضًا أن نكتبه:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{p}{a}\right)\left(x + \frac{q}{a}\right)$$

تمارين: حل للعوامل:

$$4x^2 - 23x + 15 \quad (3) \quad 10x^2 + 17x + 3 \quad (2) \quad 6x^2 + 25x + 14 \quad (1)$$

$$10x^2 - 3x - 18 \quad (6) \quad 4x^2 - 4x - 15 \quad (5) \quad 4x^2 - 20x + 21 \quad (4)$$

$$\frac{8}{3}x^2 - 2x - 3 \quad (9)$$

$$8x^2 - 6x - 9 \quad (8)$$

$$30x^2 - 7x - 2 \quad (7)$$

حل المعادلة التربيعية بطريقة التحليل للعوامل:

عندما يمكن تحليل التعبير الجبري التربيعي إلى العوامل يكون من السهل جدًا حل المعادلة التربيعية المناسبة.

مثال: حل المعادلة التربيعية $x^2 + 3x - 4 = 0$ حسب طريقة التحليل للعوامل:

حل: نحلل للعوامل فنحصل على $(x + 4)(x - 1) = 0$

وهذا يكافئ $x + 4 = 0$ أو $x - 1 = 0$ وهذا يكافئ $x = -4$ أو $x = 1$.

لذلك فإن جذري المعادلة هما: $x_1 = -4$ و $x_2 = 1$.

ملاحظة: اعتمدنا على الحقيقة الآتية: $A \cdot B = 0$ إذا وفقط إذا $A = 0$ أو $B = 0$.

مثال: حل المعادلة التربيعية الآتية حسب طريقة التحليل للعوامل: $8x^2 - 6x - 9 = 0$.

حل: نحلل للعوامل فنحصل على $\frac{1}{8}(8x - 12)(8x + 6) = 0$

وهذا يكافئ $8x - 12 = 0$ أو $8x + 6 = 0$ وهذا يكافئ $x = \frac{3}{2}$ أو $x = -\frac{3}{4}$.

لذلك فإن جذري المعادلة هما: $x_1 = \frac{3}{2}$ و $x_2 = -\frac{3}{4}$.

تمارين: حل المعادلة حسب طريقة التحليل للعوامل.

$$x^2 + 8x + 15 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \quad (6)$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \quad (5)$$

$$x^2 + 16x + 15 = 0 \quad (4)$$

$$4x^2 - 23x + 15 = 0 \quad (9)$$

$$10x^2 + 17x + 3 = 0 \quad (8)$$

$$6x^2 + 25x + 14 = 0 \quad (7)$$

$$10x^2 - 3x - 18 = 0 \quad (12) \quad 4x^2 - 4x - 15 = 0 \quad (11) \quad 4x^2 - 20x + 21 = 0 \quad (10)$$

تحليل صيغة تربيعية إلى العوامل عندما يصعب التخمين

من المؤكد وجود صعوبة كبيرة في تحليل الصيغة التربيعية $ax^2 + bx + c$ للعوامل عندما تكون المعاملات أعدادًا غير صحيحة أو أعدادًا ليست نسبية مثل: $\sqrt{3}x^2 + (1 + \sqrt{5})x - 4$ وحتى في صيغ تبدو سهلة من النظرة الأولى مثل: $x^2 - x - 1$. لذلك لا بُدَّ من السؤال عن وجود طريقة عامّة للتحليل. نتذكر المساواة والتي تكافئ

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

لذلك فبالاعتماد على رمز دلتا الذي رأيناه سابقًا فإن:

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$$

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right) \quad \text{وهي تكافئ:}$$

عندما يكون $\Delta > 0$ نحلل الصيغة التربيعية كفرق بين مربعين فنحصل على:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

$$ax^2 + bx + c = a \left(x - \left(\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right) \left(x - \left(\frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right)$$

$$ax^2 + bx + c = a \left(x - \left(\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right) \left(x - \left(\frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right)$$

لذلك فإن: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ حيث أن x_1 و x_2 هما جذرا المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$.

بهذا نكون قد توصلنا إلى قانون التحليل للعوامل الآتي:

قانون:

عندما $\Delta > 0$ (حيث أن $\Delta = b^2 - 4ac$) فإن:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

حيث أن x_1 و x_2 هما جذرا المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$

أمثلة:

1. حلل للعوامل: $5x^2 - 9x - 2$.

نجد حلول المعادلة $5x^2 - 9x - 2 = 0$ حسب القانون. $x_{1,2} = \frac{9 \mp \sqrt{81 + 40}}{10} = \frac{9 \mp 11}{10}$

أي أن $x_1 = 2$ و $x_2 = -\frac{1}{5}$. لذلك: $5x^2 - 9x - 2 = 5(x - 2)\left(x + \frac{1}{5}\right)$. يمكن أن نكتبها:

$$5x^2 - 9x - 2 = (x - 2)(5x + 1)$$

2. حلل للعوامل: $x^2 - x - 1$.

نجد حلول المعادلة $x^2 - x - 1 = 0$ حسب القانون. $x_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$

أي أن $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ و $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. لذلك: $x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$.

تمارين في التحليل للعوامل:

$9x^2 + 17x - 1$	(4)	$x^2 + 17x + 5$	(3)	$2x^2 + 7x - 1$	(2)	$x^2 - x - 5$	(1)
$x^2 - x + \frac{1}{4}$	(8)	$9x^2 - 6x + 1$	(7)	$7x^2 - 11x + 3$	(6)	$3x^2 - x - 7$	(5)