الثلاثيات الفيثاغورية

د. علي عثمان

ترتبط الثلاثيات الفيثاغورية بنظرية فيثاغورس الشهيرة التي تقول: إذا كانت أطوال أضلاع مثلث قائم زاوية هي a, b, c (وحدات) فإنّ $a^2+b^2=c^2$. والعكس صحيح إذا كانت a, b, c ثلاثة أعداد موجبة وتحقق الشرط $a^2+b^2=c^2$ ، فإنّ المثلث الذي أطوال أضلاعه a, b, c (وحدات) هو مثلث قائم الزاوية.

من الطبيعي أن يُسأل السؤال: هل يوجد مثلث قائم الزاوية بحيث أن أطوال جميع أضلاعه هي أعداد طبيعية من الوحدات؟ (الأعداد الطبيعية هي الأعداد الصحيحة والموجبة: $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots\ldots$).

تأمل في الثلاثيات الآتية: $(3,4,5)$ ، $(6,8,10)$ ، $(9,12,15)$ ولاحظ أن في كل ثُلاثية يتحقق أن مجموع مربعي الحدّ الأول والثاني يساوي مربع الحدّ الثالث (من اليسار إلى اليمين). إذ أن: $3^2+4^2=5^2$ وَ $6^2+8^2=10^2$. كذلك فإن الثُلاثية $(3n,4n,5n)$ تحقق: $(3n)^2+(4n)^2=(5n)^2$ ، لأن: $(3n)^2+(4n)^2=9n^2+16n^2=25n^2=(5n)^2$. كذلك فإن الثلاثيات $(5,12,13)$, $(10,24,26)$, $(15,36,39)$ هي ثلاثيات فيثاغورية، فمثلاً: $5^2+12^2=25+144=169=13^2$. لكل n طبيعي يتحقق أن $(5n,12n,13n)$ هي ثُلاثية فيثاغورية لأن: $(5n)^2+(12)^2=25n^2+144n^2=169n^2=(13n)^2$

- تعريف:

الثُلاثية (a,b,c) تسمى ثُلاثية فيثاغورية إذا كانت a, b, c أعداداً طبيعية تحقق المساواة: $a^2+b^2=c^2$.

انتبه إلى أن c هو أكبر حدود الثُلاثية الفيثاغورية (a,b,c) .

أمثلة: الثلاثيات $(3,4,5)$ ، $(6,8,10)$ ، $(9,12,15)$ ، $(15,36,39)$, $(10,24,26)$, $(5,12,13)$ هي ثلاثيات فيثاغورية.

ملاحظة: إذا كانت (a,b,c) ثُلاثية فيثاغورية فإن (na,nb,nc) ثُلاثية فيثاغورية لكل n طبيعي. (برهن).

نستنتج من هذا أنه إذ عُلِمَت لدينا ثُلاثية فيثاغورية فنستطيع بواسطتها إيجاد ما لا نهاية من الثُلاثيات الفيثاغورية.

أمثلة لثلاثيات فيثاغورية:

$(3,4,5)$
$(5,12,13)$
$(7,24,25)$
$(9,40,41)$
$(11,60,61)$
$(13,84,85)$

في هذه المرحلة يستطيع القارئ التأكد من أن هذه الثلاثيات هي ثلاثيات فيثاغورية بواسطة استعمال الحاسبة، سنبرهن صحة ذلك فيما بعد. نُرَتِّب هذه الثلاثيات في جدول:

	العمود الأول	العمود الثاني	العمود الثالث
السطر الأول	3	4	5
السطر الثاني	5	12	13
السطر الثالث	7	24	25
السطر الرابع	9	40	41
السطر الخامس	11	60	61
السطر السادس	13	?	?
السطر السابع	15	?	?
السطر الثامن	17	?	?
	?	?	a
	?	?	2a+1

أ. توجد علاقة بين الأعداد التي في العمود الأول. ما هي؟ الأعداد فردية.

ب. توجد علاقة بين الأعداد التي في العمود الثاني. ما هي؟ تكوّن متوالية حيث أن الفروق تأخذ بالازدياد، ونستطيع معرفة الحدّ إذا عُرِف الحدّ السابق له.

ت. توجد علاقة بين الأعداد التي في العمود الثالث والأعداد التي في العمود الثاني. ما هي؟

ث. جد الأعداد التي يجب أن تكون بدل علامات الاستفهام (؟).

ج. في كل سطر توجد علاقة بين مجموع العددين اللذين في العمودين الثاني والثالث وبين العدد الموجود في العمود الأول. ما هي هذه العلاقة؟

ح. اكتشف علاقات أخرى بين الأعداد في سطرين متتاليين في العمودين الأول والثاني.

سنحاول بعد هذه الملاحظات إيجاد المزيد من الثلاثيات الفيثاغورية. لنفرض أننا نريد إيجاد الثُلاثية التي تبدأ ب 17. هذه الثُلاثية من الصورة $(17,b,c)$ حيث أن $c=b+1$ وأيضاً $b+c=17^2=289$. لذلك $2b+1=289$ لذلك $b=144\ ,\ c=145$. أي أن الثلاثية هي $(17,144,145)$. باستعمال الحاسبة نتأكد من أنها هي ثُلاثية فيثاغورية.

تعميم: ليكن $a>1$ عدد فردي، ونفرض أننا نريد ثلاثية فيثاغورية (a,b,c) حسب القاعدة التي لاحظناها فإن $c=b+1$ وأيضاً $b+c=a^2$. لذلك فإن $c=\dfrac{a^2+1}{2}\ ,\ b=\dfrac{a^2-1}{2}$.

نظرية: لكل $a>1$ عدد فردي ، يتحقق أن $\left(a,\dfrac{a^2-1}{2}\ ,\ \dfrac{a^2+1}{2}\right)$ هي ثلاثية فيثاغوريّة.

برهان: من الواضح أن حدود الثلاثية جميعها أعداد طبيعية. علينا أن نبرهن أن :

$$a^2+\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2$$ **وفعلاً فإن:**

$$a^2+\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2=a^2+\frac{a^4-2a^2+1}{4}=\frac{4a^2+a^4-2a^2+1}{4}=\frac{a^4+2a^2+1}{4}=\frac{(a+1)^2}{4}=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2$$

ملاحظة: **نلاحظ أن الحدّ الثاني في جميع الثلاثيات الفيثاغورية التي ذكرناها هو من مضاعفات العدد 4.**
من السهل إثبات أن هذا صحيح لكل ثلاثية فيثاغورية من الصورة:
$\left(a,\frac{a^2-1}{2}\ ,\ \frac{a^2+1}{2}\right)$ لكل **عدد فردي** $a>1$. **أي أن علينا إثبات أن** $\frac{a^2-1}{2}$ **من مضاعفات 4 لكل عدد فردي** $a>1$ **. وهذا صحيح لأن:** a^2-1 **من مضاعفات 8 لكل عدد فردي** $a>1$ **. برهن!**

سؤال: هل توجد ثُلاثية فيثاغورية من الصورة $\left(a,\frac{a^2-1}{2}\ ,\ \frac{a^2+1}{2}\right)$ بحيث أن الحد الثالث هو23 ؟

جواب: كلا، لأن الحد الثاني عندها سيكون 22 وهو ليس من مضاعفات العدد 4.

سؤال: هل توجد ثُلاثية فيثاغورية من هذا النوع بحيث أن الحد الثالث هو 37؟

جواب: كلا، لأن الحد الثاني يجب أن يكون 36، ومجموع الحدين هو 73 وهو ليس مربعاً لعدد صحيح. (مجموع الحد الثاني والثالث يساوي مربع الحد الأول).

ثُلاثية فيثاغورية أساسية: نلاحظ في جميع الثلاثيات الفيثاغورية:

$$(3,4,5),(5,12,13),(7,24,25),(9,40,41),(11,60,61),(13,84,85)$$

أن القاسم المشترك الأعظم لحدود كل منها هو 1. ثلاثيات من هذا النوع نسميها <u>ثلاثيات فيثاغورية أساسية</u>. أما الثلاثيات:

$(6,8,10)$ ، $(9,12,15)$، $(15,36,39)$, $(10,24,26)$, $(5,12,13)$ فليست ثلاثيات أساسية لأن القاسم المشترك الأعظم للثُلاثية الأولى والرابعة هو 2 وللثانية والثالثة هو3.

تعريف: ثُلاثية (a,b,c) تسمى ثُلاثية أساسية "إذا كانت الثُلاثية فيثاغورية وإذا كان القاسم المشترك الأعظم لحدود الثُلاثية هو1.

نظرية: لكل **عدد فردي** $a>1$، الثُلاثية $\left(a,\frac{a^2-1}{2}\ ,\ \frac{a^2+1}{2}\right)$ هي ثُلاثية أساسية.

برهان: بما أن $\frac{a^2+1}{2}$, $\frac{a^2-1}{2}$ عددان متتاليان فالقاسم المشترك الأعظم لهما هو 1. لذلك فإن القاسم المشترك لحدود الثلاثية هو 1.

المسألة التي سنبحثها هي: هل توجد ثلاثيات فيثاغورية أساسية غير الثلاثيات الفيثاغورية الأساسية التي وجدناها؟

مثال. جد جميع الثلاثيات الفيثاغورية ذات الصورة $(15,b,c)$.

حل: $15^2+b^2=c^2 \Leftrightarrow c^2-b^2=225 \Leftrightarrow (c-b)(c+b)=225$.

c-b و c+b هما عددان حاصل ضربهما يساوي 225. نكتب العدد 225 كحاصل ضرب عددين مختلفين: 25 · 9 = 45 · 5=75 · 3=225 · 1 =225

هذه هي جميع الإمكانيات لكتابة 225 كحاصل ضرب عددين مختلفين.

الحالة الأولى: c-b=1 و c+b=225 ينتج أن b=112 و c=113.

الحالة الثانية: c-b=3 و c+b=75 ينتج أن b=36 و c=39.

الحالة الثالثة: c-b=5 و c+b=45 ينتج أن b=20 و c=25.

الحالة الرابعة: c-b=9 و c+b=25 ينتج أن b=8 و c=17.

حصلنا على الثلاثيات: أ. $(15,112,113)$ وهذه من الصورة $\left(a,\frac{a^2-1}{2}\ ,\ \frac{a^2+1}{2}\right)$.

ب. $(15,36,39)$ هي ثلاثية فيثاغورية ناتجة بواسطة ضرب الثلاثية $(5,12,13)$ في3 ، ليست ثلاثية أساسية. ج. الثلاثية $(15,20,25)$، ناتجة بواسطة ضرب الثلاثية $(3,4,5)$ في5 ، ليست ثلاثية أساسية. د. الثلاثية $(15,8,17)$، هي ثُلاثية فيثاغورية أساسية وهي ليست من الصورة .

$\left(a,\frac{a^2-1}{2}\ ,\ \frac{a^2+1}{2}\right)$.

نستنتج مما تقدم أنه توجد ثلاثيات فيثاغورية أساسية ليست من الصورة $\left(a,\frac{a^2-1}{2}\ ,\ \frac{a^2+1}{2}\right)$.

سنعمل فيما يلي على إيجاد الصورة العامة للثلاثيات الفيثاغورية الأساسية. نبدأ ببعض الملاحظات:

1. إذا كان حدّان من حدود الثُلاثية الفيثاغورية يقبلان القسمة على d فإن الحد الثالث يقبل القسمة على d. لو فرضنا مثلاً أن $a = d\cdot x$ و $b = d\cdot y$ فإن $d^2x^2+d^2y^2=c^2$ لذلك فإن $d^2\left(x^2+y\right)^2=c^2$) لذلك فإن c يقبل القسمة على d بدون باق.

2. نستنتج من الملاحظة السابقة أنه إذا كانت (a,b,c) ثُلاثية أساسية فلا يمكن أن يكون a و b زوجيين، والسؤال الذي يطرح نفسه:

هل توجد ثُلاثية فيثاغورية (a,b,c) بحيث أن a و b فرديان (و c زوجي) ؟

نبرهن أن هذا الأمر غير ممكن.

لنفرض أن a=2m+1 و b=2n+1 و c=2k لذلك فإن:

$$a^2+b^2=(2m+1)^2+(2n+1)^2=4\left(m^2+n^2+m+n\right)+2$$

من ناحية أخرى فإن $a^2+b^2=c^2=(2k)^2=4k^2$. لذلك فإن:

$$4\left(m^2+n^2+m+n\right)+2=4k^2$$

أحد الطرفين من مضاعفات 4 والطرف الآخر ليس من مضاعفات 4 . وهذا تناقض.

لذلك فلا توجد ثُلاثية فيثاغورية أساسية (a,b,c) بحيث أن a و b فرديان.

3. نستنتج من الملاحظة السابقة أنه إن كانت (a,b,c) ثُلاثية أساسية فإن أحد العددين a و b هو زوجي والآخر هو فردي.

نأتي الآن للكشف عن الثلاثيات الفيثاغورية الأساسية. لتكن (a,b,c) ثُلاثية فيثاغورية أساسية ولنفرض أن b هو عدد زوجي وأن a هو عدد فردي وأن c هو عدد فردي (لماذا ؟) من المعادلة نستنتج أن $b^2=c^2-a^2$.

لنفرض أن b = 2x و x طبيعي. لذلك فإن: $(2x)^2=c^2-a^2=(c-a)(c+a)$

لذلك: $4x^2=(c-a)(c+a)$ ، ومن هنا ينتج أن $x^2=\frac{c-a}{2}\cdot\frac{c+a}{2}$.

(لاحـــظ أن $c-a\,,c+a$ همـــا عـــددان زوجيـــان لـــذلك فـــإن $\frac{c+a}{2},\ \frac{c-a}{2}$ هما عددان طبيعيان).بالاعتماد على الملاحظة (1) نستنتج أن c و a متنافران، أي أن القاسم المشترك الأعظم لهما هو1.

<u>سؤال:</u> برهن أن $\frac{c+a}{2},\ \frac{c-a}{2}$ هما أيضاً عددان متنافران. (لو كانا غير متنافرين لكان مجموعهما وفرقهما غير متنافرين، فيكون c و a غير متنافرين وهذا تناقض).

ننظر الآن في المعادلة $x^2=\frac{c-a}{2}\cdot\frac{c+a}{2}$. بما أن x^2 هو حاصل ضرب عددين متنافرين فإن كل واحد من العددين المتنافرين هو مربع لعدد صحيح. حسب النظرية الآتية:

<u>نظرية:</u> إذا كان u و v عددين متنافرين وإذا كان $x^2=uv$ و x طبيعي فإن u و v مربعان تامان. برهن!

بما أن $\frac{c-a}{2}$ هو مربع لعدد طبيعي فإنه يوجد n طبيعي بحيث أن $\frac{c-a}{2}=n^2$ ،

وبما أن $\frac{c+a}{2}$ هو مربع لعدد طبيعي فإنه يوجد n طبيعي بحيث أن $\frac{c+a}{2}=m^2$.

بما أن $\frac{c+a}{2}$ و $\frac{c-a}{2}$ متنافران فإن n و m متنافران أيضاً .

من المعادلتين: $\frac{c-a}{2}=n^2$ و $\frac{c+a}{2}=m^2$ نستنتج أن :

$a=m^2-n^2$ و $c=m^2+n^2$ و $x^2=m^2n^2=(mn)^2$ لذلك فإن $x=mn$.

و لذلك فإن $b=2mn$. نستنتج من هذا:

<u>نظرية:</u> كل ثُلاثية فيثاغورية أساسية هي من الصورة $\left(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2\right)$، حيث أن m و n عددان طبيعيان متنافران و m > n وأحدهما زوجي والآخر فردي.

<u>مثال:</u> عندما نعوض m=10 و n=7 نحصل على الثُلاثية:

$\left(10^2-7^2,2\cdot10\cdot7,10^2+7^2\right)=(51,140,149)$.

o تمارين:-

1. جد الثلاثية الفيثاغورية الناتجة في كل حالة وافحص إن كانت أساسية أم لا.

أ.عندما m=11 و n=8 ب. عندما m=12 و n=5 .

ج. عندما m=11 و n=6 د. عندما m=12 و n=7 .

هـ. عندما m=14 و n=5 و. عندما m=14 و n=11.

2. أ. جد جميع الثلاثيات ذات الصورة $(12,b,c)$.

ب. جد جميع الثلاثيات ذات الصورة $(15,b,c)$.

ج. جد جميع الثلاثيات ذات الصورة $(18,b,c)$.

د. جد جميع الثلاثيات ذات الصورة $(24,b,c)$.

3. أ. هل يوجد مثلث قائم الزاوية جميع أضلاعه صحيحة بالسنتمترات بحيث أن أحد ضلعيه القائمين 2 سم؟ علل

ب. هل يوجد مثلث قائم الزاوية جميع أضلاعه صحيحة بالسنتمترات بحيث أن أحد ضلعيه القائمين 21 سم؟ علل . كم حلاً يوجد؟

ج. هل يوجد مثلث قائم الزاوية جميع أضلاعه صحيحة بالسنتمترات بحيث أن أضلاعه تكوّن متوالية حسابية فرقها 1 ؟ كم حلاً يوجد؟

د. هل يوجد مثلث قائم الزاوية جميع أضلاعه صحيحة بالسنتمترات بحيث أن أضلاعه تكوّن متوالية حسابية فرقها 2 ؟ كم حلاً يوجد؟

هـ. هل يوجد مثلث قائم الزاوية طول وتره 221 سم وطول كل ضلع من ضلعيه الآخرين عدد صحيح من السنتمترات؟

حل: نلاحظ أن $221=13\cdot17$ و $17=4^2+1$ و $13=3^2+2^2$

$$221=(3^2+2^2)(4^2+1)=10^2+11^2=14^2+5^2$$

$$221=13\cdot\left(4^2+1\right)=17\cdot(3^2+2^2)$$

<u>*حسب قاعدة الثلاثيات الفيثاغورية:*</u> $k\,(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$ نتوصل إلى الثلاثيات:

$(14^2-5^2, 2\cdot14\cdot5, 14^2+5^2)$ والتي تساوي $(171 \ , \ 140 \ , \ 221)$

$(11^2-10^2, 2\cdot11\cdot10, 221)$ والتي تساوي $(21 \ , \ 220 \ , \ 221)$

$13(4^2-1, 2\cdot4\cdot1, 4^2+1)$ والتي تساوي $13(15,8,17)$ وتساوي $(195 \ , \ 104 \ , \ 221)$

$17(3^2-2^2, 2\cdot3\cdot2, 3^2+2^2)$ والتي تساوي $17(5,12,13)$ وتساوي $(85 \ , \ 204 \ , \ 221)$