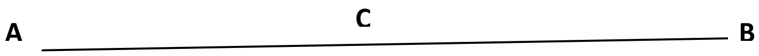
النسبة المزدوجة، رباعية توافقية، دائرة أبولونيوس والمنظار الهندسي/بقلم: د. علي عثمان

تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل

معطى قطعة مستقيمة AB. لتكن C نقطة داخل القطعة AB. إذا تحقق أن $AC:CB=m:n$ فنقول أن C تقسّم AB من الداخل بنسبة $m:n$.

من الممكن كتابة هذا على النحو $\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}$.



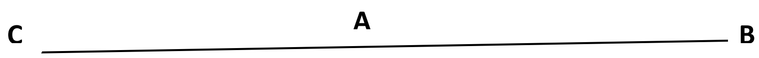
مثال: معطى أن $A=+3$ ، $B=+10$. جد النقطة على محور الأعداد التي تقسم القطعة AB بنسبة $1:5$.

حل: لتكن C نقطة بين النقطتين A و B. نفرض أن $C=x$.

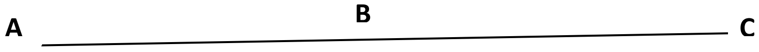
$$\frac{AC}{CB}=\frac{1}{5}$$
$$\frac{x-3}{10-x}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow$$
$$5x-15=10-x\Leftrightarrow 6x=25\Leftrightarrow$$
$$x=\frac{25}{6}=4\frac{1}{6}$$

أي أن $C=+4\frac{1}{6}$

تقسيم قطعة مستقيمة من الخارج



كانت C على امتداد المستقيم AB من جهة B، فإنّ $\frac{CA}{CB}>1$.



نقول أن C تقسّم AB من الخارج بنسبة $m:n$ إذا كانت C خارج القطعة AB وعلى امتداد المستقيم AB وتحقق $\frac{CA}{CB}=\frac{m}{n}$.

مثال: معطى $A=+3$ ، $B=+8$.

1. جد النقطة C التي تقسم AB من الخارج بنسبة $2:1$.
2. جد النقطة D التي تقسم AB من الخارج بنسبة $1:4$.

حل: أ) نفرض $C=x$. بما أن النسبة $\frac{2}{1}>1$ فإنّ C تقع على يمين B. لذلك:

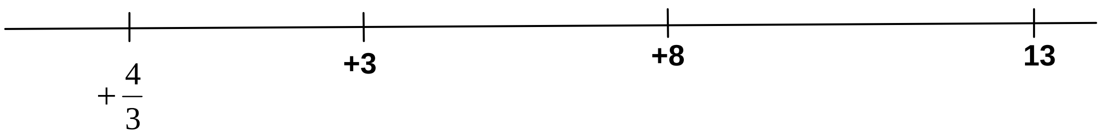
$$\frac{x-3}{x-8}=\frac{2}{1} \Leftrightarrow$$
$$x-3=2x-16 \Leftrightarrow$$
$$x=13$$

أي أن $C=+13$.

حل: ب) نفرض $D=t$. بما أن $\frac{1}{4}<1$ فإنّ D تقع على يسار A. لذلك:

$$\frac{3-t}{8-t}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$
$$12-4t=8-t \Leftrightarrow$$
$$4=3t \Leftrightarrow$$
$$t=\frac{4}{3}$$

لذلك: $D=+\frac{4}{3}$



اتفاق:

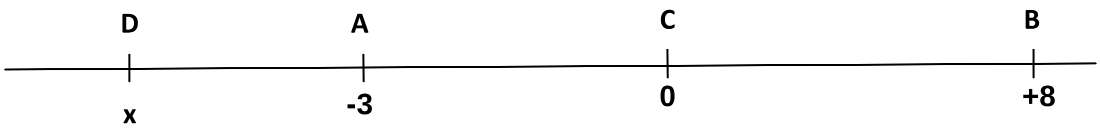
(1) عندما نقول أن النقطة C تقسّم القطعة AB من الداخل بالنسبة t فيكون المقصود أن C تقع على المستقيم AB وتقع بين النقطتين A وB وأنّ $\frac{AC}{CB}=t$.

(2) عندما نقول أن النقطة C تقسم القطعة AB من الخارج بالنسبة t، فيكون المقصود أن C تقع على المستقيم AB خارج القطعة AB . إن كان $t>1$ فإنّ C تقع على امتداد AB من جهة B وتحقق $\frac{AC}{BC}=t$ وإن كان $t<1$ فإنّ C تقع على امتداد AB من جهة A وتحقق $\frac{AC}{BC}=t$.

سؤال: معطى $A=-3$ ، $B=+8$ و $C=0$.

جد النقطة D (على محور الأعداد) التي تقسّم AB من الخارج بنفس النسبة التي تقسّم C بها القطعة AB .

حل: النسبة التي تقسّم C بها القطعة AB تساوي $\frac{AC}{CB}=\frac{3}{8}$ بما أن $\frac{3}{8}<1$ فإنّ النقطة D يجب أن تقع على يسار A. نفرض أن $D=x$.



$$\frac{AD}{DB}=\frac{3}{8}$$
$$\frac{-3-x}{8-x}=\frac{3}{8}\Leftrightarrow$$
$$-24-8x=24-3x\Leftrightarrow$$
$$-48=5x\Leftrightarrow$$
$$x=-\frac{48}{5}$$

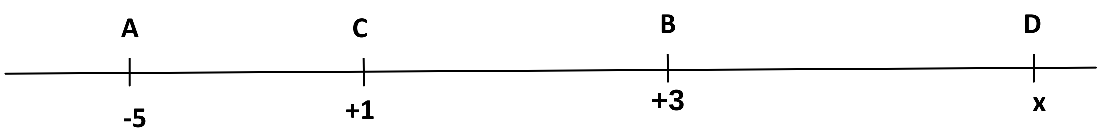
أي أن $D=-9\frac{3}{5}$

النسبة المزدوجة

(Double ratio היחס הכפול)

لتكن A,B,C,D أربع نقاط على مستقيم واحد بحيث أنّ النقطة C تقع بين AوB و D تقع خارج القطعة AB. النسبة المزدوجة والتي يرمز لها $[AB,CD]$ هي النسبة بين النسبة التي تقسّم بها C القطعة AB من الداخل إلى النسبة التي تقسّم بها D القطعة AB من الخارج. أي أن:

$$[AB,CD]=\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{BD}$$



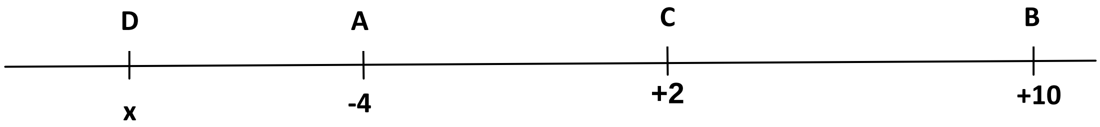
مثال: جد x حتى يتحقق أن $[AB,CD]=1$

حل:

$$\frac{x+5}{x-3}=1 \Leftrightarrow 3(x-3)=x+5 \Leftrightarrow$$
$$3x-9=x+5 \Leftrightarrow$$
$$2x=14 \Leftrightarrow$$
$$x=7$$

سؤال: جد موقع النقطة D إذا علمت أن $A=-4, C=+2, B=+10$ و $[AB,CD]=2$

حل:



واضح أن $\frac{AC}{CB}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ بما أن $[AB,CD]=2$ لذلك فإنّ: $2=\frac{AD}{BD}:\frac{3}{4}$ ، لذلك فإنّ $\frac{AD}{BD}=\frac{3}{8}$

بما أن $\frac{3}{8}<1$ فإنّ D تقع على يسار A. نفرض أن $D=x$. لذلك:

$$\frac{-4-x}{10-x}=\frac{3}{8} \Leftrightarrow$$
$$-32-8x=30-3x \Leftrightarrow$$
$$5x=-62 \Leftrightarrow$$
$$x=-12\frac{2}{5}$$

رباعية توافقية:

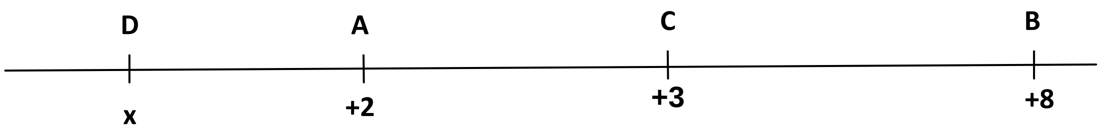
لتكن A,B,C,D أربع نقاط على مستقيم واحد. إذا تحقق أن النسبة المزدوجة $[AB,CD]=1$ فنقول أن الرباعية (A,B,C,D) هي رباعية توافقية.

مثال: معطى أن $A=+2, B=+8, C=+3$ جد D حتى تكون (A,B,C,D) رباعية توافقية.

حل: نريد أن يتحقق أن:

$$\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=1$$

وهو يكافئ $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$



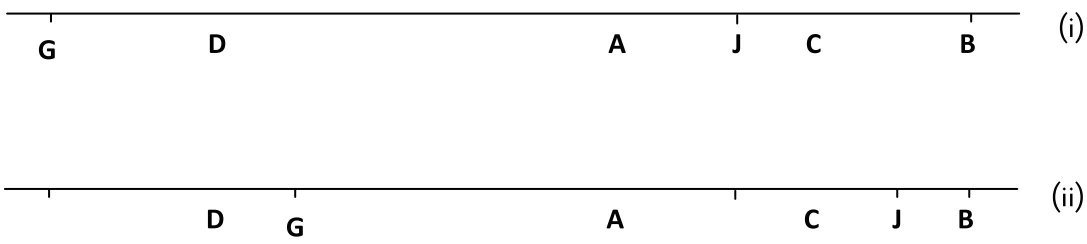
بما أن: $\frac{AC}{BC}=\frac{3-2}{8-3}=\frac{1}{5}<1$

فإنّ D تقع على يسار A. نفرض أن $D=x$

$$\frac{AD}{BD}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{2-x}{8-x}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow 5(2-x)=8-x\Leftrightarrow$$
$$10-5x=8-x\Leftrightarrow$$
$$2=4x\Leftrightarrow$$
$$x=\frac{1}{2}$$

أي أن $D=+\frac{1}{2}$.

نظرية 1. إذا كانت (A,B,C,D) رباعية توافقية وإذا كانت J و G نقطتان كلتاهما تقعان على يسار C و D ، حسب الترتيب أو كلتاهما تقعان على يمين C و D، حسب الترتيب (انظر الشكل):



فإنّ (A,B,J,G) ليست رباعية توافقية.

من السهل برهنة الادعاء الآتي: إذا كان x و y موجبين فإنّ:

1. $\frac{x}{y}<1 \Leftarrow \frac{x}{y}<\frac{x+t}{y+t}$ لكل $t>0$.
2. $\frac{x}{y}>1 \Leftarrow \frac{x}{y}>\frac{x+t}{y+t}$ لكل $t>0$.

برهنة النظرية: نفرض أن (A,B,C,D) توافقية لذلك يتحقق: $\frac{AC}{CB}=\frac{DA}{DB}$.

نبرهن أن (A,B,J,G) ليست توافقية حسب الوضعية (i).

$$\frac{AJ}{JB}=\frac{AC-CJ}{JC+CB}<\frac{AC}{JC+CB}<\frac{AC}{CB}$$
$$\frac{GA}{GB}=\frac{GD+DA}{GD+DB}$$

حسب الادعاء السابق فإنّ:

$$\frac{GD+DA}{GD+DB}>\frac{DA}{DB}$$

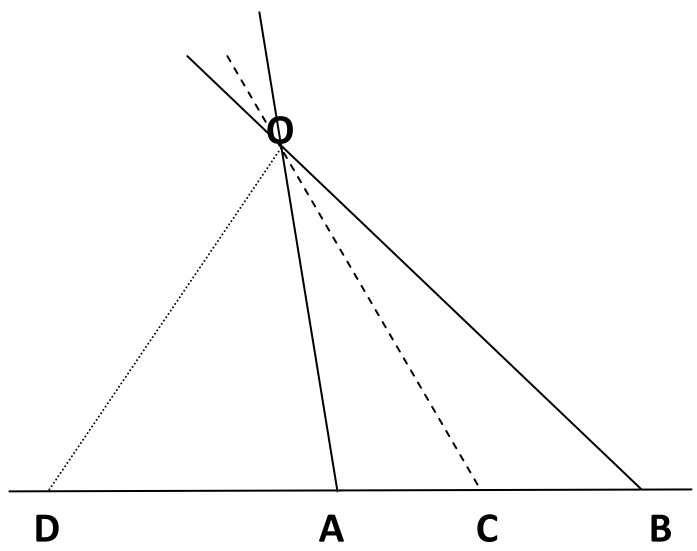
أي أن $\frac{GA}{GB}>\frac{DA}{DB}$ لذلك فإنّ:

$$\frac{AJ}{JB}<\frac{AC}{CB}=\frac{DA}{DB}<\frac{GA}{GB}$$

أي أن $\frac{AJ}{JB}<\frac{GA}{GB}$ لذلك فإنّ الرباعية (A,B,J,G) ليست توافقية.

البرهان حسب الوضعية (ii) مشابه جدا.

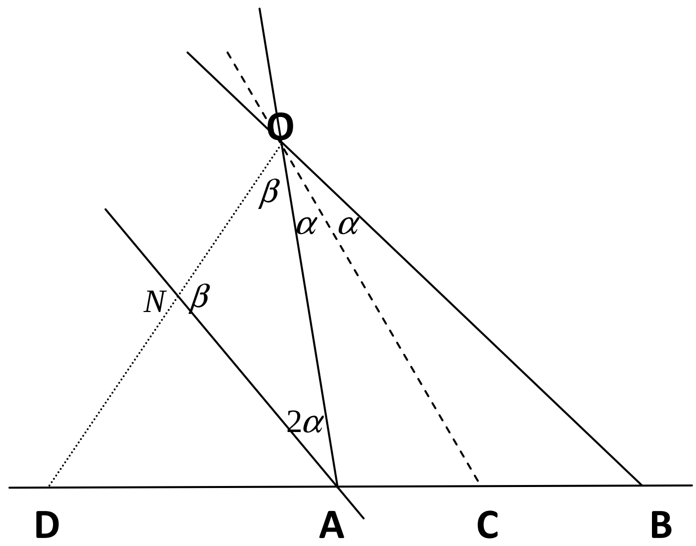
نظرية 2: لتكن O زاوية ولتكن (A,B,C,D) رباعية نقاط على مستقيم واحد، بحيث OC ينصف زاوية AOB و OD ينصف الزاوية المكملة لها.



برهان: علينا أن نبرهن أن $\frac{AC}{CB}=\frac{DA}{DB}$. من A نرسم موازياً لOB ، يقطع DO في النقطة N. $NA \parallel OB$ (انظر الشكل) نفرض $\angle AOB=2\alpha$ لذلك فإنّ $\angle NAO=2\alpha$. بما أنّ منصفي زاويتين متكاملتين متعامدان فإنّ $\angle DOC=90°$.

لذلك فإنّ:

$$\angle NOA = \beta = 90° - \alpha$$
$$\angle ANO + 2\alpha + \beta = 180°$$



لذلك فإنّ $\angle ANO = 90° - \alpha = \beta$. لذلك فإنّ AN=AO.

(نتذكر نظرية منصف الزاوية: منصف الزاوية في المثلث يقسم الضلع المقابل للزاوية إلى جزأين النسبة بينهما كالنسبة بين ضلعي الزاوية، لذلك فإنّ $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{CB}$).

بما أن NA II OB فإنّ المثلثين DNA و DOB متشابهان. لذلك فإنّ $\frac{DA}{DB} = \frac{NA}{OB}$

لكن NA=OA لذلك فإنّ $\frac{DA}{DB} = \frac{OA}{OB}$. وبما أن $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{CB}$ فإنّ:

$\frac{DA}{DB} = \frac{AC}{CB}$ وهو المطلوب إثباته.

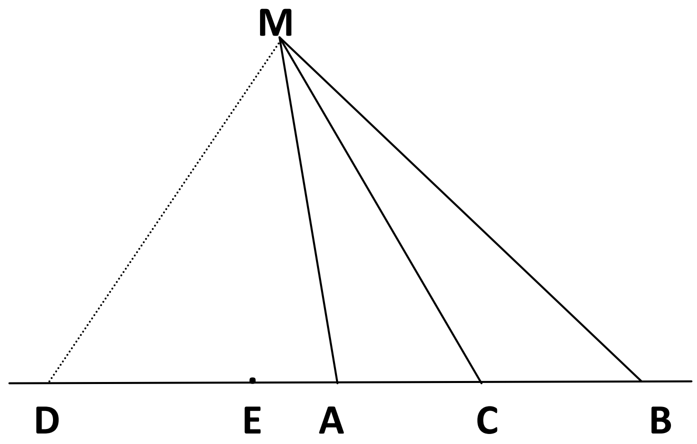
دائرة أبولونيوس

نظرية 3: المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوي التي تحقق كل منها أن النسبة بين بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقداراً ثابتا هو دائرة وهذه الدائرة تسمى دائرة ابولونيوس. فيما يلي سنبرهن أن المحل الهندسي هو فعلا دائرة.

(**ملاحظة:** من السهل إيجاد المحل الهندسي بواسطة الهندسة التحليلية. سنتعلّم هنا كيف نجده دون استعمال الهندسة التحليلي).

معطى نقطتان A و B. نريد معرفة المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوي التي تحقق: M على المحل الهندسي إذا وفقط إذا تحقق $\frac{AM}{BM}=t$ ، حيث أن $0<t$ ثابت.

حل: توجد نقطة وحيدة c تقسّم القطعة AB من الداخل بالنسبة t. أي أن $\frac{AC}{BC}=t$ وتوجد نقطة وحيدة D تقسّم AB من الخارج بالنسبة t (أي أن $\frac{AD}{BD}=t$).

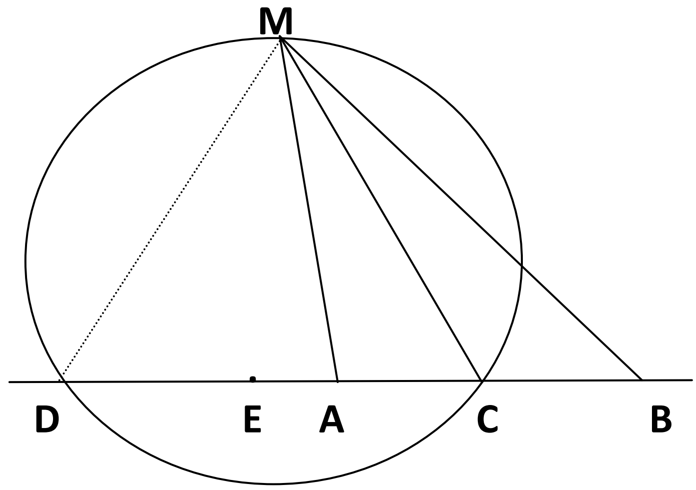


نحدد النقطتين C وD على المستقيم AB وهما واقعتان على المحل الهندسي. لتكن M نقطة على هذا المحل الهندسي. لذلك فإنّ $\frac{MA}{MB}=t$ لكن $\frac{CA}{CB}=t$.

لذلك فإنّ $\frac{MA}{MB}=\frac{CA}{CB}$. لذلك فإنّ النقطة M يجب أن تقع على منصف الزاوية $\angle AMB$.
النقطة D يجب أن تقع على منصّف الزاوية المكملة لـ $\angle AMB$ لأنّ الرباعية(A,B,C,D) هي رباعية توافقية. لذلك فإنّ $\angle DMC=90^\circ$. لذلك فإنّ المثلث DMC هو مثلث قائم الزاوية. لتكن E منتصف القطعة DC. نوصل Mمع Eومع D. لذلك فإنّ EC=DE=ME لأن المتوسط يساوي نصف الوتر. لذلك فإنّ النقطة E تبعد عن C وَ D وَ M بنفس البعد أي أن M تقع على الدائرة التي قطرها DC (ومركزها E).

أي أن كل نقطة تقع على المحل الهندسي المذكور يجب أن تقع على الدائرة التي مركزها E. (هذه الدائرة تسمى دائرة أبولونيوس نسبة لأول من وجد حل المسألة).

نبرهن الآن صحة الاتجاه المعاكس. القضية التي سنبرهنها هي:



إذا كانت (A,B,C,D) رباعية توافقية (كما في الشكل) وإذا كانت E منتصف القطعة DC فإنّ كل نقطة M تقع على الدائرة التي قطرها DE تحقق:

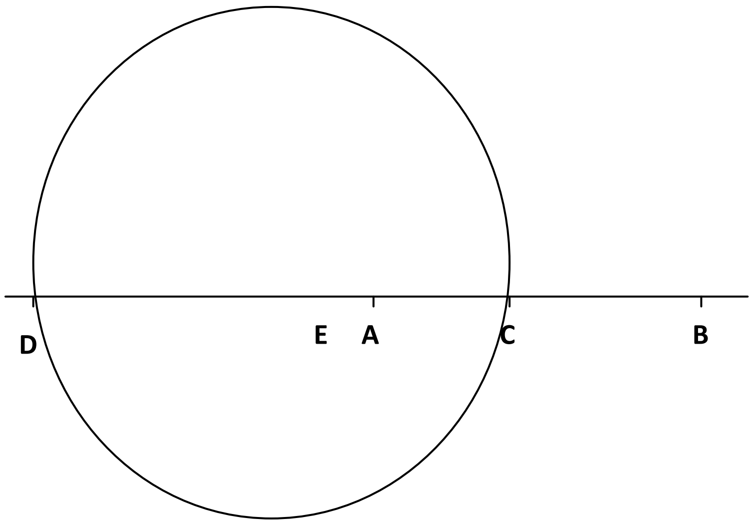
$\frac{MA}{MB}=\frac{AC}{CB}$. أي أن MC ينصف الزاوية $\angle AMB$.

بالفرض الخاطئ نفرض أن MC لا ينصف $\angle AMB$. أي أن منصف زاوية $\angle AMB$ يقطع المستقيم AB في نقطة 'C تختلف عن C. لو فرضنا أن 'C تقع على يسار (يمين)C فإنّ منصف الزاوية المكملة يقطع امتداد AB في نقطة 'D تقع على يسار (يمين) D. لأن منصفي الزاويتين متعامدين. بما أن (A,B,C,D) توافقية فإنّ (A,B,C',D') ، حسب **نظرية 1** ، ليست توافقية وهذا يناقض **نظرية 2**.

سؤال: أرسم المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوي M التي تحقق $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}$.

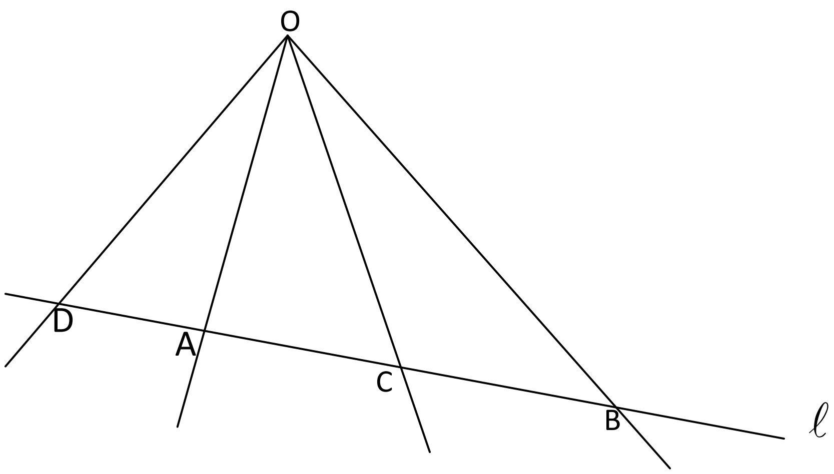
حل: نعين النقطة C التي تقسم AB من الداخل بالنسبة $1:2$ والنقطة D التي تقسم AB من الخارج بنسبة $1:2$.

نعين منتصف DC. ونرسم الدائرة التي قطرها DC.



منظار هندسي والنسبة المزدوجة

منظار هندسي: حزمة من الأشعة منطلقة من نقطة واحدة O تسمى منظاراً هندسياً.



إذا كان عدد الأشعة في المنظار 2 نقول أن المنظار ثنائي، وإذا كان عدد الأشعة في المنظار 3 نقول أنه منظار ثلاثي. وبشكل عام: منظار من الترتيب n هو منظار فيه n أشعة.

نظرية 4: في المنظار الرباعي النسبة المزدوجة لنقاط تقاطع أشعة المنظار مع أي مستقيم قاطع لأشعة المنظار هي نسبة ثابتة.

برهان: نبرهن أن النسبة المزدوجة لا تتعلق بالمستقيم القاطع ℓ أو بأطوال القطع OA,OB,OC,OD وإنما تتعلق فقط بالزوايا التي تعينها الأشعة الأربعة. من أجل البرهان نتذكر النظرية: مساحة المثلث الذي ضلعان من أضلاعه a ,b والزاوية التي بينهما γ تساوي $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

نعود إلى الشكل: من أجل التبسيط نرمز:

$$\angle BOC = \theta, \angle COA = \gamma, \angle DOB = \beta, \angle DOA = \alpha$$

S(MNL) يرمز لمساحة المثلث MNL لأية ثلاثة حروف M,N,L. حسب النظرية حول مساحة المثلث وحسب هذه الرموز فإنّ: $S(DOA) = \frac{1}{2} \cdot OD \cdot OA \cdot \sin\alpha$

$$S(DOB)=\frac{1}{2}\cdot OD\cdot OB\cdot \sin\beta$$
$$S(AOC)=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OC\cdot \sin\gamma$$
$$S(COB)=\frac{1}{2}\cdot OC\cdot OB\cdot \sin\theta$$

لهذا فإنّ:

$$\frac{S(AOC)}{S(COB)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OC\cdot \sin\gamma}{\frac{1}{2}\cdot OC\cdot OB\cdot \sin\theta}=\frac{OA\cdot \sin\gamma}{OB\cdot \sin\theta}$$

$$\frac{S(DOA)}{S(DOB)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot OD\cdot OA\cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2}\cdot OD\cdot OB\cdot \sin\beta}=\frac{OA\cdot \sin\alpha}{OB\cdot \sin\beta}$$

من ناحية أخرى فإننا نعلم بان النسبة بين مساحتي مثلثين لهما رأس مشترك والقاعدتان على نفس المستقيم تساوي النسبة بين القاعدتين أي أن:

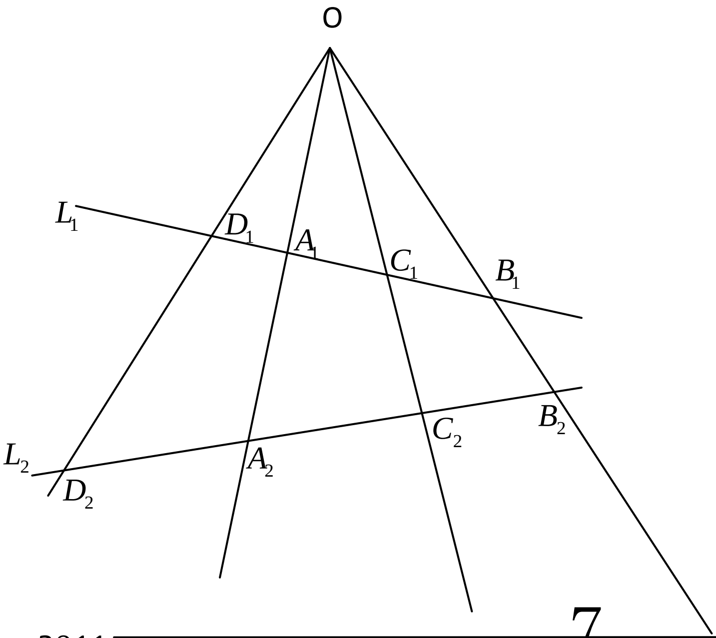
$$\frac{S(AOC)}{S(COB)}=\frac{AC}{CB} \text{ و } \frac{S(DOA)}{S(DOB)}=\frac{DA}{DB}$$

لذلك فان

$$\frac{AC}{CB}:\frac{DA}{DB}=\frac{OA\cdot \sin\gamma}{OB\cdot \sin\theta}:\frac{OA\cdot \sin\alpha}{OB\cdot \sin\beta}=\frac{\sin\gamma\cdot \sin\alpha}{\sin\theta\cdot \sin\beta}$$

أثبتنا بهذا أن النسبة المزدوجة تتعلق فقط بالزوايا التي تعيّنها الأشعة ولا تتعلق بأطوال القطع.

استنتاج:



إذا كان ℓ_1 و ℓ_2 مستقيمين يقطعان أشعة المنظار O كما في الشكل فان:

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1}:\frac{D_1A_1}{D_1B_1}=\frac{A_2C_2}{C_2B_2}:\frac{D_2A_2}{D_2B_2}$$