تقسيم حسب نظام موحّد

بقلـم د.عـلي عثمان

أراد شخص توزيع مبلغ M شواقل بين أولاده وأحفاده. سجّل أسماءهم ورقمهم بالأرقام مـن 1 حتى n. ووضع المبلغ في الصندوق يأخذ كل واحد منهم عندما يأتي دورة مبلغ a شواقل وَ $\frac{1}{m}$ من المبلغ المتبقـي. الشـخص رقـم 1 هـو الـذي يأخـذ في البدايـة يليـة الشـخص رقـم 2، وتنتهي عملية الأخذ من الصندوق عندما يبقى فيه مبلغ أقل من a، هذا المبلغ يتم التبرع به إلى مؤسسة خيرية (انتبه: من الممكن أن بعض الأشخاص لا يأخذون شيئاً من النقود).

كم حصة كل شخص؟ في أي الشروط لا يبقى نقود للتبرع بها؟ في أي الشرـوط تكـون المبـالغ التي يأخذها الأشخاص أعداداً صحيحة من الشواقل؟

نأتي الآن لمعالجة المسألة: نفرض أن x_j هو المبلغ المتبقي بعد أن يأخذ الشـخص رقـم j حصته ونفرض أن y_j هي حصة الشخص رقم j .

واضح أن: $$y_1 = a + \frac{1}{m}(M - a) = \frac{1}{m} \cdot M + \frac{m-1}{m} \cdot a$$

كذلك فإنَّ:

$$y_{j+1} = a + \frac{1}{m}(x_j - a)$$

$$x_{j+1} = x_j - y_{j+1} = \frac{m-1}{m}(x_j - a)$$

لذلك فإن القانون التراجعي للمتوالية (x_i) هو:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{m-1}{m}(M - a) \\ x_{j+1} = \frac{m-1}{m} x_j - \frac{m-1}{m} a \end{cases}$$

لاحظ أيضاً أنَّ: $y_{i+1} = x_i - x_{i+1}$ لكل i .

نريد إيجاد القانون العام للمتواليـة (x_i) كدالـة بـالمتغير iوكـذلك الأمـر بالنسـبة للمتواليـة (y_i).

طريقة 1 نعتمد على المبرهنة الآتية:

مبرهنة:

إذا كانت (a_i) متوالية قانونها التراجعي:

$$\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_{i+1} = ta_i + r \end{cases}$$

حيث $t \neq 1$ وَ $t \neq 0$، فإن المتواليتين (b_i) وَ (c_i) المعرفتين حسب: $b_i = a_{i+1} - a_i$ وَ $c_i = a_i - a_{i+1}$ لكل i هما متواليتان هندسيتان والنسبة الثابتة لكل منها هي t.

برهان:

$$\frac{b_i + 1}{b_i} = \frac{a_{i+2} - a_{i+1}}{a_{i+1} - a_i} = \frac{ta_{i+1} - ta_i}{a_{i+1} - a_i} = t$$

وكذلك فإنّ:

$$\frac{c_i + 1}{c_i} = \frac{a_{i+1} - a_{i+2}}{a_i - a_{i+1}} = \frac{ta_i - ta_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} = t$$

بهذا تمّ اثبات القضية.

حسب هذه المبرهنة فإن المتوالية (y_i) هي متوالية هندسية ونسبتها تساوي $\frac{m-1}{m}$. لذلك فإن قانون حدها العام هو:

$$y_j = y_1 \left(\frac{m-1}{m}\right)^{j-1} = \frac{1}{m}\left(M + (m-1)a\right) \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^{j-1}$$

(انتبه: المبالغ التي يأخذها الأشخاص تشكل متوالية هندسية نسبتها $\frac{m-1}{m}$ وهذه النسبة أصغر من 1، لذلك فهي متوالية هندسية تنازلية).

من الواضح أيضاً أنّ $x_j = M - (y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_j)$.

نحسب بالاعتماد على قانون الجمع لحدود المتوالية الهندسية:

$$x_j = M - \frac{y_1\left[\left(\frac{m-1}{m}\right)^j - 1\right]}{\frac{m-1}{m} - 1}$$

$$x_j = M - \frac{1}{m}\left(M + (m-1)a\right)\frac{\left[\left(\frac{m-1}{m}\right)^j - 1\right]}{-\frac{1}{m}}$$

$$x_j = M + \left(ma - a + M\right)\left(\left(\frac{m-1}{m}\right)^j - 1\right)$$

$$x_j = \left[M + (m-1)a\right]\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^j - (m-1)a$$

طريقة 2

نجد القانون العام كدالة للمتغير i للمتوالية (a_i) التي تحقق:

$$\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_{i+1} = ta_i + r \end{cases}$$

حيث أنّ $t \neq 1$ وَ $t \neq 0$.

نُعرّف متوالية (b_i) بحيث أن $b_i = a_i + \alpha$ لكل i. نحدد قيمة α بحيث تكون المتوالية (b_i) هندسية .

$$b_{i+1} = tb_i + r - (t-1)\alpha \;\Leftrightarrow\; b_{i+1} = a_{i+1} + \alpha = ta_i + r + \alpha = t\left(b_i - \alpha\right) + r + \alpha$$

المتوالية هندسية إذا وفقط إذا تحقق أنّ $b_{i+1} = t \cdot b_i$ إذا وفقط إذا تحقق أنّ $r = (t-1)\alpha$

أي أن $\alpha = \frac{r}{t-1}$ لذلك فإنّ $b_j = b_1 \cdot t^{j-1} = (a_1 + \alpha)t^{j-1} \;\Leftrightarrow\; b_j = (a_1 + \frac{r}{t-1})t^{j-1}$.

لذلك فإن:

$$a_j = b_j - \alpha = (a_1 + \frac{r}{t-1})t^{j-1} - \frac{r}{t-1} .$$

نعود الآن إلى المتوالية (x_i) حيث أن:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{m-1}{m}(M - a) \\ x_{j+1} = \frac{m-1}{m}x_j - \frac{m-1}{m}a \end{cases}$$

لذلك فإن:

$$x_j = \left[\frac{m-1}{m}\left(M - a\right) - \frac{\frac{m-1}{m}a}{\frac{m-1}{m} - 1}\right]\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^{j-1} + \frac{\frac{m-1}{m}a}{\frac{m-1}{m} - 1}$$

$$=\left[\frac{m-1}{m}(M-a)+(m-1)a\right]\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^{j-1}-(m-1)a$$

$$=\left[M+(m-1)a\right]\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^{j}-(m-1)a$$

$$x_j=\left[M+(m-1)a\right]\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^{j}-(m-1)a$$

$$y_j=\frac{1}{m}\left[M+(m-1)a\right]\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^{j-1}$$

نجيب الآن على السؤال:

ما هو الشرط اللازم والكافي بحيث تكون جميع الحصص أعـداداً طبيعيـة علـماً بـأنّ M و a و m هي أعداد طبيعية؟

الجواب: نلاحظ أنّ:

$$y_j=\frac{1}{m}\left[M+(m-1)a\right]\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^{j-1}=\left[M+(m-1)a\right]\cdot\frac{(m-1)^j}{m^j}=\frac{\left[M+(m-1)a\right]}{m^j}\cdot(m-1)^j$$

بما أنّ m-1 و m عددان متنافران فإنّ y_j هو عـدد صـحيح لكـل $n\geq j\geq 1$ إذا وفقـط إذا كان M+(m-1)a ينقسم بدون باقٍ على m^n. أي أنّه يوجد k طبيعي بحيـث أنّ k= M+(m-1)a m^n.

سؤال: ما هو الشرط الذي يجب أن يحققه العدد a؟

جواب: يجب أن يتحقق الشرط أنّ $0\leq x_n<a$ وهو يكافئ:

$$(m-1)a\leq \mathrm{km^n}\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n}<ma\Leftrightarrow 0\leq\left[M+(m-1)a\right]\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n}-(m-1)a<a$$

وهو يكافئ:

$$k(m-1)^{n-1}\geq a>\frac{k(m-1)^n}{m}\Leftrightarrow\ (m-1)a\leq \mathrm{k}\cdot(m-1)^n<ma$$

من الجوابين السابقين نستنتج النتيجة الآتية:

نتيجة: تكون جميع الحصص أعداداً صحيحة (من الشواقل) إذا تحقق الشرطان التاليان معاً:

$$k(m-1)^{n-1} \geq a > \frac{k(m-1)^n}{m} \quad \text{و} \quad M+(m-1)a = km^n$$

والمتوالية (y_j) تحقق:

$$y_j = km^{n-1}\left(\frac{m-1}{m}\right)^{j-1}$$

لذلك فهي متوالية هندسية ونسبتها الثابتة هي $\frac{m-1}{m}$.

عندما يكون $a = k(m-1)^{n-1}$ فإنّ المبلغ ينقسم إلى حصص بين الأشخاص فلا تبقى حصة للتبرع بها.

مثال 1: نحل المسألة عندما $m=6$ وَ $n=5$ وَنختار $k=2$. لذلك فإنّ a يحقق $2\cdot\frac{5^5}{6} < a \leq 2\cdot 5^4$ أي أنّ $1041\frac{2}{3} < a \leq 1250$. نختار $a=1250$، لذلك فإنّ $M = 2\cdot 6^5 - 5\cdot 1250 = 9302$.

الآن نكتب المسألة:

مسألة (أ): أراد شخص توزيع مبلغ 9302 شاقلاً بين أولاده وأحفاده. سجّل أسماءهم ورقّمهم بالأرقام 1، 2، 3، 4، 5..... ووضع المبلغ في صندوق. يأخذ كل واحد منهم عندما يأتي دورة مبلغ 1250 شاقلاً وَ $\frac{1}{6}$ المبلغ المتبقي . الشخص رقم 1 هو الذي يأخذ في البداية يلية الشخص رقم 2، وتنتهي عملية الأخذ من الصندوق عندما يبقى فيه مبلغ أقل من 1250 شاقل. هذا المبلغ المتبقي يتم التبرع به إلى مؤسسة خيرية (**انتبه:** من الممكن أن بعض الأشخاص لا يأخذون شيئاً من النقود).

كم حصة كل شخص؟

الحل:

يأخذ الشخص رقم 1 $1250+\frac{1}{6}\cdot(9302-1250)=2592$

يأخذ الشخص رقم 2 $1250+\frac{1}{6}\cdot(6710-1250)=2160$

يأخذ الشخص رقم 3 $1250+\frac{1}{6}\cdot(4550-1250)=1800$

يأخذ الشخص رقم 4 $1250+\frac{1}{6}\cdot(2750-1250)=1500$

يأخذ الشخص رقم 5 $1250+\frac{1}{6}\cdot(1250-1250)=1250$

المتوالية: 2592، 2160، 1800، 1500، 1250 هي متوالية هندسية ونسبتها هي $\frac{5}{6}$.

لا يتبقى شيء للتبرع.

مسألة (ب):

نعود للمثال 1 ونختار $a=1200$، لذلك فإنّ $M=2\cdot6^5-5\cdot1200=9552$.

نصوغ المسألة: أراد شخص توزيع مبلغ 9552 شاقلاً بين أولاده وأحفاده. سجّل أسماءهم ورقّمهم بالأرقام 1، 2، 3، 4، 5..... ووضع المبلغ في صندوق. يأخذ كل واحد منهم عندما يأتي دورة مبلغ 1200 شاقلاً وَ $\frac{1}{6}$ المبلغ المتبقي . الشخص رقم 1 هو الذي يأخذ في البداية يلية الشخص رقم 2، وتنتهي عملية الأخذ من الصندوق عندما يبقى فيه مبلغ أقل من 1200 شاقل، هذا المبلغ المتبقي يتم التبرع به إلى مؤسسة خيرية (انتبه: من الممكن أن بعض الأشخاص لا يأخذون شيئاً من النقود). **كم حصة كل شخص؟**

الحل: يأخذ الشخص رقم 1 $1200+\frac{1}{6}\cdot(9552-1200)=2592$

يأخذ الشخص رقم 2 $1200+\frac{1}{6}\cdot(6960-1200)=2160$

يأخذ الشخص رقم 3 $1200+\frac{1}{6}\cdot(4800-1200)=1800$

يأخذ الشخص رقم 4 $1200+\frac{1}{6}\cdot(3000-1200)=1500$

يأخذ الشخص رقم 5 $1200+\frac{1}{6}\cdot(1500-1200)=1250$

المبلغ المتبقي 250 شاقل يتمّ التبرع به.

مسألة (ج):

لو اخترنا $a=1147$، لذلك فإنّ $M=2\cdot 6^5-5\cdot 1147=9817$. نصوغ المسألة:

أراد شخص توزيع مبلغ 9817 شاقل بين أولاده وأحفاده. سجّل أسماءهم ورقّمهم بالأرقام من 1، 2، 3، 4، 5..... ووضع المبلغ في صندوق. يأخذ كل واحد منهم عندما يأتي دورة مبلغ 1147 شاقلاً وَ $\frac{1}{6}$ المبلغ المتبقي . الشخص رقم 1 هو الذي يأخذ في البداية يلية الشخص رقم 2، وتنتهي عملية الأخذ من الصندوق عندما يبقى فيه مبلغ أقل من 1147شاقل، هذا المبلغ المتبقي يتم التبرع به إلى مؤسسة خيرية (انتبه: من الممكن أن بعض الأشخاص لا يأخذون شيئاً من النقود). **كم حصة كل شخص؟**

الحل: يأخذ الشخص رقم 1 $1147+\frac{1}{6}\cdot(9817-1147)=2592$

يأخذ الشخص رقم 2 $1147+\frac{1}{6}\cdot(7225-1147)=2160$

يأخذ الشخص رقم 3 $1147+\frac{1}{6}\cdot(5065-1147)=1800$

يأخذ الشخص رقم 4 $1147+\frac{1}{6}\cdot(3265-1147)=1500$

يأخذ الشخص رقم 5 $1147+\frac{1}{6}\cdot(1765-1147)=1250$

المبلغ المتبقي 515 شاقل يتمّ التبرع به.

$$y_j=\frac{1}{4}[M+3a]\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{j-1}=\frac{(M+3a)\cdot 3^{j-1}}{4^j}$$

نشترط أن يكون $M+3a$ من مضاعفات 4^5 (لأنّه يجب أن يقبل القسمة على $(4^5,4^4,4^3,4^2,4)$.

وكذلك فإن $y_5\geq a$ نفرض أن: $M+3a=4^5\cdot k$. لذلك:

$$81\cdot k\geq a\Leftrightarrow\frac{4^5\cdot k\cdot 3^4}{4^5}\geq a\Leftrightarrow y_5\geq a$$

سؤال: عندما نختار $k=1$ و $a=81$ فيكونَ $M=781$. فكيف يتمّ التوزيع؟

مثال: عندما نستبدل العدد 81 بالعدد 80 فماذا يكون الحل؟

في هذه الحالة فإن: $M = 1024 - 240 = 784$

$$x_5 = 1024 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 - 240 = 243 - 240 = 3$$

أي أن المبلغ المتبقي للتبرع هو 3 شواقل.

حسب القانون فإن

المبلغ الذي يأخذه الأول: $y_1 = \frac{1}{4}(1024) = 256$

الشخص الثاني: $y_2 = \frac{1}{4}(1024) \cdot \frac{3}{4} = 256 \cdot \frac{3}{4} = 192$

$$y_3 = \frac{1}{4}(1024) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 192 \cdot \frac{3}{4} = 144$$

$$y_4 = \frac{1}{4}(1024) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 144 \cdot \frac{3}{4} = 108$$

المبلغ المتبقي حسب القانون:

$$x_5 = (1024) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 - 3 \cdot 80 = 243 - 240 = 3$$

لاحظ أيضاً أن: $784 - (256 + 192 + 144 + 108 + 81) = 3$

المبلغ المتبقي للتبرع هو 3 شاقل .ولو نفذنا عملية التقسيم بدون استعمال القانون فإن:

$y_1 = 80 + \frac{1}{4}(784 - 80) = 256$ يبقى $784 - 256 = 528$

$y_2 = 80 + \frac{1}{4}(528 - 80) = 192$ يبقى $528 - 192 = 336$

$y_3 = 80 + \frac{1}{4}(336 - 80) = 144$ يبقى $336 - 144 = 192$

$y_4 = 80 + \frac{1}{4}(192 - 80) = 108$ يبقى $192 - 108 = 84$

$y_5 = 80 + \frac{1}{4}(84 - 80) = 81$ يبقى 3 .

مسألة:

تمّ تقسيم مبلغ بين مجموعة من الأشخاص، حسب الخطة الآتية: وُضِع المبلغ في صندوق. يأخذ كل شخص عندما يأتي دوره 17000 شاقلاً و $\frac{1}{5}$ المبلغ الذي يبقي في الصندوق . يتم التبرع بالمبلغ المتبقي في الصندوق إن كان أقل من 17000 شاقل. كانت حصة الشخص الثالث 50000 شاقل. كم كان المبلغ الذي في الصندوق في البداية وكم كان المبلغ المتبقي للتبرع؟

حل: حصص الأشخاص تكون متوالية هندسيّة نسبتها $\frac{4}{5}$.

لذلك فحصة الشخص الرابع $50000\times\frac{4}{5}=40000$

لذلك فحصة الشخص االخامس $40000\times\frac{4}{5}=32000$

لذلك فحصة الشخص السادس $32000\times\frac{4}{5}=25600$

لذلك فحصة الشخص السابع $25600\times\frac{4}{5}=20480$

عندما نحسب حصة الشخص الثامن $20480\times\frac{4}{5}=16384$

نلاحظ أنها أقل من 17000 لذلك فلا تعطى حصة للشخص الثامن، ويتمّ توقف عملية التوزيع بعد أن يأخذ الشخص السابع حصته. كذلك فإنّ: حصة الشخص الثاني هي:

$$50000\times\frac{5}{4}=62500$$

وحصة الشخص الأول هي $62500\times\frac{5}{4}=78125$

مجموع الحصص:

$$78125+62500+50000+40000+32000+25600+20480=308705$$

علينا معرفة المبلغ الذي تمّ تقسيمه

حصة الأول: 78125 ، لذلك فإنّ:

$$\frac{1}{5}\cdot[M+68000]=78125$$
$$M+68000=390625$$
$$M=390625-28000=322625$$

المبلغ الذي تمّ التبرع به هو $322625-308705=13920$

طريقة آخرى للحل:

أخذ الشخص الثالث 50000 شاقلاً. نحل بشكل تراجعي العملية التي يتم تنفيذها على المبلغ المتبقي في الصندوق هي:

اطرح 17000 واقسم الناتج على 5 ثم اجمع 17000. العملية العكسية: اطرح 17000 وأضرب في 5 اجمع 17000 . لذلك المبلغ الذي كان في الصندوق قبل أن يأخذ منه الثالث هو:

$$5\times(50000-17000)+17000=182000$$

"حتى نعرف المبلغ المتبقي في الصندوق في المرحلة القادمة: نطرح 17000 ونضرب في $\frac{4}{5}$.

وبالعكس: حتى نعرف المبلغ الذي كان في الصندوق في المرحلة السابقة نضرب في $\frac{5}{4}$ ونجمع 17000".

كان في الصندوق في المرحلة السابقة: $17000+182000\times\frac{5}{4}=244500$

المبلغ الذي أخذه الشخص الثاني: $244500-182000=62500$

المبلغ الذي كان في البداية: $17000+244500\times\frac{5}{4}=322625$

بما أنّ المبلغ البدائي معلوم فتسهل عملية التقسيم.