حوار رياضي

بقلم: د. علي عثمان (في كتاب : نحو تفكير أسرع وأجمل وأرقى. إصدار أكاديمية القاسمي- **2000**)

(هذا نموذج لدرس في الرياضيات، الطالب في مركزه، يحلل، يفكر، يعـرض وجهـات نظره، ينتقد ذاته، يصحح، يعمم، يبرهن ويعرف أهمية البرهان، يدقق في فهم النصوص، يشارك زملاءه، يبذل الجهود ويسأل، ويعرف كيف يسأل).

قال هيثم: سمعت من عبير أنه لو أخذنا عدداً طبيعياً أيا كان وضربناه في 6 ثـم جمعنـا للناتج 1 فإننا نحصل على عدد أولي.

فكر باهر قليلاً وقال: إن كلام عبير هذا غير صحيح. فلو اخترنا مثلاً العدد 4 وضـربناه في 6 وجمعنا لحاصل الضرب 1 نحصل على 25 وهو عدد غير أولي.

قال هيثم: صحيح ما تقول فيبدو أني لا أذكر جيداً. ولكن ماذا لو اخترنـا عـدداً طبيعيـاً وضربناه في 6 وطرحنا من حاصل الضرب 1؟

مـثلاً $6 \times 1 - 1 = 5$ ، $2 \times 6 - 1 = 11$ ، $6 \times 3 - 1 = 17$ ، $6 \times 4 - 1 = 23$ ، جميعها أعداد أولية.

قال باهر: إنه أمر مدهش، لم أسمع بهذا من قبل. ولقد سمعت من معلمي أنـه لا يعـرف قانوناً لمتوالية لا نهائية جميع حدودها أعداد أولية.

قال هيثم: هيا نتصل بعبير ونعلمها بهذا.

وعندما اتصل هيثم بعبير قالت: يسعدني أن تكتشف نظرية ولكني أنبهك الى أن هذا العدد من التجارب لا يكفي، فيجب البرهان.

شكر هيثم عبير على هذه النصيحة. جلس هيثم وباهر، هيـثم يفكـر بالبرهـان وبـاهر بالفحص. بعد قليل أعلن باهر: هذه القضية خاطئة. فلو اخترنا العدد 20 مثلاً فإن:

$119 = 1 - 20 \times 6$ ولكن $119 = 17 \times 7$ فهو ليس أولياً.

وافق هيثم باهراً واتصل مرة أخرى بعبير ليعلمها بما توصلا إليه. عندها قالت عبير: إني أذكر أني قرأت بإحدى المجلات أن كل عدد أولي هو من الصورة 6n+1 أو 6n-1. ولكنني لا أذكر البرهان.

أعلم هيثم باهراً بهذا. وهذه الجملة خاطئة أيضاً، قال باهر. إذ أن العددين 2 و 3 ليسا من هذه الصورة. هيا اتصل بها وأخبرها بهذا.

قال هيثم: مهلاً، لا أريد أن أحرجها أكثر وأنا أعرف أنها مشغولة في حل مسائل هندسية. هيا نفكر أولاً بإثبات النظرية بالنسبة للأعداد الأولية الأكبر من 3 فأظن أنها تحقق النظرية مثلاً: $7=1+1\times6$، $11=1-2\times6$، $13=1+2\times6$.

بعد دقائق، قال هيثم: كل عدد طبيعي أكبر من 4 هو من الصورة:

6n, 6n+1, 6n+2, 6n+3, 6n+4, 6n+5، ولكن عدد من الصورة 6n+5 يمكن أن نكتبه بالصورة 6m-1 (أي من الصورة 6n-1). تدخل باهر وقال: 6n يقسم على 2، 6n+2 يقسم على 2، 6n+3 يقسم على 3، 6n+4 يقسم على 2.

قال هيثم: إذاً فإن الأعداد التي ذكرتها ليست أولية؟

قال باهر: نعم. لذلك فالعدد الأولي يجب أن يكون من الصورة 6n+1 أو 6n-1 باستثناء 2 و 3. تشجع هيثم واتصل بعبير وأعلمها بما توصلا إليه.

قالت عبير: أشكركما جداً وما مع المسألة الأولى.

قال هيثم: أية مسألة تعنين؟

قالت عبير أعني المسألة أنه عند تعويض عدد طبيعي بدل n في الصورتين 6n-1, 6n+1 فإننا نحصل على عددين أحدهما على الأقل عدد أولي.

قال هيثم: لقد أخبرتك بأن هذه القضية خاطئة فلو عوضنا n=20 فإننا نحصل على: $119=1-20\times6$، $121=1+20\times6$.

قالت: شكراً شكراً، تذكرت.

قال باهر: يبدو أنها لا تكتفي بمثل واحد، هيا نجد قانوناً لمتوالية لا نهائية، عندما نعـوض كل حد من حدودها في كلا الصورتين نحصل على عددين غير أوليين.

قال هيثم: إنك تبحث عن المشاكل، إنها مسألة جدية، وإني معجب بتفكيرك هذا.

قال باهر: هذا التفكير بسبب التحدي الذي أشعر به.

قال هيثم: لنبحث عن متوالية أعداد بحيث أن تعويض كل منها في $6n-1$ يعطي عدداً غير أولي.

قال باهر: إني أرى هذه الصورة مثل a^2-1 وعندها $(a-1)(a+1)=a^2-1$

قال هيثم: قصدك أن تعوض $n=6k^2$

قال باهر: أنا لم أقصد هذا، بل أنت اكتشفت هذا، نعم لو عوضنا $n=6k^2$ فإن:

$6n - 1 = 6 \times 6k^2 - 1= (6k)^2 - 1= (6k - 1)(6k + 1)$ فهو عدد غير أولي.

قال هيثم: وماذا تكون الصورة $6n + 1$ عندها؟

أكمل هيثم: $6 \times 6k^2 + 1= (6k)^2 + 1$. والآن متى يكون $(6k)^2+1$ عدداً غير أولي؟

نظر هيثم وباهر نظرات تفكير وعجز أمام هذه المسألة. فجأة سمع الاثنان قرعـاً علـى الباب. وإذا بعبير تدخل.

قالت عبير أتيت لأشارك في التفكير ولأعرض عليكم مسألة أتعبني التفكير فيها.

قال هيثم (مبتسماً): لن نسمع مسألتك قبل أن نحل هذه المسألة.

قالت عبير: ما هي المسألة؟

قال هيثم: متى لا يكون $(6k)^2 + 1$ أولياً؟

نظرت عبير قليلاً للمسألة وقالت: لو كان رقم آحاد $(6k)^2$ أربعة فإن رقم آحـاد $(6k)^2 + 1$ يكون 5 وهذا العدد أكبر من 5 فهو ليس أولياً، لأنه يقسم على 5.

سر هيثم وباهر من ملاحظة عبير. التي قالت أيضاً: سمعت مسألة مشابهة وهـــي: متـــى يكون a^2+1 عدد غير أولي؟

قال باهر: لنواصل قليلاً وقال: يكون رقم آحاد $(6k)^2$ الرقم 4 عندما يكون رقم آحاد $6k$ إما 2 أو 8 وهذا يحدث عندما قيم k هي:

2، 7، 12، 17،......

أو 3، 8، 13، 18،......

الأول هي متوالية عددية حدها العام: $k=2+5(m - 1)=5m-3$

الثانية هي متوالية عددية حدها العام: $k=3+5(m -1)=5m-2$

والخلاصة: إنه لو عوضنا $n=6(5m-3)^2$ أو $n=6(5m - 2)^2$ في الصـــورتين $6n-1$ و $6n+1$ فإننا نحصل على عددين غير أوليين.

بهذا وجدنا ما لا نهاية من الأعداد. عندما نعوض كلاً منها في الصـــورتين $6n-1$, $6n+1$، نحصل على عددين غير أولين.

قالت عبير (يعد أن عرفت كل الحديث): هل توجد أعداد أخرى غير الأعـــداد التـــي فـــي هاتين المتواليتين؟

قال باهر: بالطبع العدد 20 مثلاً.

قال هيثم: يبدو أننا توجهنا توجهاً معقداً في تحليلنا، المتوالية التي حدها العام $a_n=6n+1$ هي متوالية لا نهائية وكذلك المتوالية التي حدها العام $b_n=6n-1$ هي متوالية لا نهائيـــة أيضـــاً. ونحن نعرف أن عدد الأعداد الأولية هو عدد نهائي، ألا تذكرون برهـــان المعلـــم لهـــذه القضية! لذلك فإن عدد الأعداد غير الأولية ذات الصورة $6n+1$ هو عدد لا نهائي وكـــذلك فإن عدد الأعداد غير الأولية ذات الصورة $6n-1$ هو عدد لا نهائي.

قالت عبير: إن نظرية إقليدس التي برهنها المعلم أفادت بأن مجموعة الأعداد الأولية هـــي مجموعة لا نهائية. فيبدو أنك لا تتذكر جيداً يا هيثم.

قال هيثم: سأتصل بالمعلم لأتأكد.

اتصل هيثم بالمعلم وسأله.

قال المعلم: لقد برهنا أن مجموعة الأعداد الأولية هي مجموعة لا نهائية.

قال هيثم: إني أذكر أنك قلت، نفرض أن مجموعة الأعداد الأولية هي مجموعة نهائية.

قال المعلم: لقد برهنا هذه النظرية بطريقة الفرض الخاطئ. افترضنا أن مجموعة الأعداد الأولية هي مجموعة نهائية وتوصلنا ال تناقض. إني أقترح عليك دراسة البرهان بعمق أكبر. فيبدو أنك لم تفهمه جيداً.

قال هيثم: شكراً يا أستاذ. إني أجلس مع باهر وعبير ونبحث في الرياضيات.

قال المعلم: إني أقترح عليكم دراسة وفهم برهان نظرية إقليدس التي تفيد بأن مجموعة الأعداد الأولية لا نهائية. وحاولوا أن تبرهنوا حسب نفس الطريقة أن مجموعة الأعداد الأولية ذات الصورة 6n-1 هي أيضاً مجموعة لا نهائية.

قال هيثم: يا لها من مفاجأة. منذ ساعات ونحن نفكر في الأعداد التي من هذه الصورة ولقد أثبتنا وجود ما لا نهاية من الأعداد غير الأولية من هذه الصورة.

قال المعلم: بورك فيكم. حاولوا أن تبرهنوا وجود ما لا نهاية من الأعداد الأولية من هذه الصورة.

أبلغ هيثم صديقيه بفحوى حديث المعلم. درسوا برهان نظرية إقليدس.

باهر: هيا نفرض أن عدد الأعداد الأولية ذات الصورة 6n-1 هو عدد نهائي.

نفرض أن هذه الأعداد هي: $p_1, p_2,\ldots\ldots\ldots\ldots p_k$ لكي نصل الى تناقض علينا إيجاد عدد من نفس الصورة بحيث أنه لا يقبل القسمة على أي عدد أولي.

العدد $p_1, p_2,\ldots\ldots\ldots\ldots p_k$ هو من الصورة 6k-1إن كان k فردياً وهو من الصورة 6k+1 إن كان k زوجياً. عندما نضيف له 1 فإننا نحصل على عدد زوجي. فالعدد الذي نبغي بناءه يختلف في صورته عن العدد الذي اقترح في برهان نظرية إقليدس.

قالت عبير: ماذا مع العددين 2 و 3 لماذا لا ندخلهما في بناء العدد .

هيثم: أقترح أن نأخذ العدد $x=2p_1\cdot \ldots\ldots\ldots \cdot p_k+3$

عبير: قد يكون x من الصورة 1 - 6n وقد يكون من الصورة 6n+1. تذكر أن علينا اختيار عدد من الصورة 1 - 6n.

هيثم: نختار العدد $x=6p_1\cdot p_2\cdot\ldots\ldots\ldots \cdot p_k-1$ فمن الواضح أنه من الصورة 6n-1.

باهر: أجل، إن هذا العدد من الصورة 6n-1 وهو لا يقبل القسمة على 2 ولا يقبل القســمة على 3 ولا يقبل القسمة على أي عدد من الأعداد $p_1,\ldots\ldots, p_k$.

هيثم: لذلك فهو عدد أولي. سأتصل بالمعلم.

اتصل هيثم بالمعلم وأخبره بما توصلوا إليه.

المعلم: ولماذا x لا يقبل القسمة على عدد أولي من الصورة 6n+1 ؟

هيثم: يبدو أني تأثرت كثيراً ببرهان نظرية إقليدس. يبدو أنه توجد مرحلة إضافية هنا.

المعلم: نعم، ما بقي عليكم فحصه هو أمر في غاية السهولة. الى اللقاء.

أبلغ هيثم صديقيه.

عبير: لقد فرضنا أن x غير أولي فهو قابل للتحليل كضرب أعداد أوليــة $q_1\cdot q_2\cdot \ldots\ldots \cdot q_j$,جميع هذه الأعداد يجب أن تكون من الصورة 6n+1.

باهر: لكن ضرب أعداد من الصورة 6n +1 هو عدد من نفس الصورة.

بما أن x ليس من الصورة 1- 6n لذلك فإن x لا يمكنه أن يتحلل للعوامل. لذلك فإن x هو عدد أولي.

عبير وهيثم: وهذا يناقض الفرض، حيث أن x هذا يختلف عن جميع الأعداد $p_1, \ldots\ldots p_k$.

قالت عبير: سأتصل وأخبره بهذا.

هيثم: اصبري قليلاً. إنه حتماً سيطلب منا أن نبرهن وجود عدد لا نهـائي مـن الأعـداد الأولية ذات الصورة $6n+1$.

باهر: صحيح، لماذا لم أفكر بهذا؟

عبير: أعتقد أن البرهان مشابه لهذا البرهان. فلو فرضنا أن عـدد الأعـداد الأوليـة ذات الصورة $6n+1$ هو عدد نهائي. وأن هذه الأعداد هي $p_1, p_2, \ldots\ldots p_r$

ولو أمعنا النظر في العدد $x=6p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots\ldots p_r+1$ فهو أيضاً من الصورة $6n+1$ ولا يقبـل القسمة على 2 و 3 ولا يقبل القسمة على أي من الأعداد $p_1,\ldots\ldots,p_r$. فلو فرضـنا أن x ليس عدداً أولياً فهو قابل للتحليل كضرب أعداد أولية $q_1,\ldots\ldots q_m$جميعها مـن الصـورة: $6n-1$. أي أن $x=q_1 \cdot \ldots\ldots \cdot q_m$.

الآن: $q_m \cdot \ldots\ldots \cdot q_1$ هو من الصورة $6n-1$ لكن لا يوجد عدد من الصورة $6n-1$ وهو أيضاً من الصورة $6n+1$. سأتصل.

باهر: مهلاً! إن كل ما قلته جميل إلا الجملة قبل الأخيرة. إن $q_1 \cdot \ldots\ldots \cdot q_m$ هو من الصورة $6n+1$ عندما يكون m زوجياً.

هيثم: آه، يوجد خطأ في البرهان.

عبير: صدقت.

جلس الأصدقاء الثلاثة يفكرون في هذه المسألة وأخيراً قرروا الاتصال بمعلمهم.

اتصلت عبير بالمعلم وأخبرته بتفاصيل أبحاثهم.

المعلم: فعلاً، يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية ذات الصورة $6n+1$ ولكن برهان هذه النظرية بحاجة الـى دراسـة أعمـق فـي نظريـة الأعـداد. أقتـرح اختيـار العـدد $x=(2p_1 \cdot \ldots\ldots \cdot p_r)^2+3$.

العدد x لا يقبل القسمة على أي واحد من الأعداد $2,3, p_1,\ldots\ldots,p_r$.

هناك نظرية تفيد بأنه إذا وجد y صحيح بحيث أن y^2+3 يقبل القسمة على عدد أولي q فإن q يجب أن يكون من الصورة 6n+1.

بالاعتماد على هذه النظرية نستنتج أنه لا يوجد عدد أولي من الصورة 1- 6n بحيث أن x يقبل القسمة عليه. لذلك فإن x أولي. وبما أن x يختلف عن جميع الأعداد $p_1,\ldots\ldots,p_r$ وبما أنه من الصورة 6n+1, نصل الى تناقض مع الفرض.

أخبرك أيضاً بنظرية "ديريكليه" والتي تقول أن لكل عددين صحيحين موجبين وغريبين a و b توجد ما لا نهاية من الأعداد الأولية ذات الصورة $a{\cdot}n+b$.

إن برهان هذه النظرية معقد ويحتاج الى معلومات كثيرة في نظرية الأعداد. إني أقترح عليكم البحث عن هذه النظرية في المكتبة.

عبير: ماذا تقصد بعددين غريبين؟

المعلم: هما عددان بحيث أن الكسر الذي مقامه أحدهما وبسطه العدد الآخر غير قابل للاختصار مثل (2,5) (11,12) (4,5). شكرت عبير معلمها وحدثت صديقيها عن فحوى حديثها مع المعلم.

قال هيثم: وماذا عن المسألة التي أردت الاستفسار عنها حين أتيت هنا؟

عبير: ألا زلت تذكر! مسألتي تبدو أسهل مما كنتم تفكرون فيه، وهي كالتالي: معطى معادلة مستقيم من الصورة ax +by =c، ومعطى نقطة (x_0,y_0). كيف نعرف بسرعة إن كانت النقطة واقعة على المستقيم (وهذه سهلة) أو فوقه أو تحته، دون الحاجة الى الرسم؟

قالا: نعدك أن نفكر بمسألتك غداً بعد أن نستريح قليلاً.