رُباعيّات فيثاغورية\ د. علي عثمان

رباعيــة فيثاغوريّــة (a,b,c,d) هــي أربعــة أعــداد طبيعيــة (صــحيحة وموجبــة) تحقــق $a^2+b^2+c^2=d^2$.

أمثلة : (1) $(1,2,2,3)$تحقق $1^2+2^2+2^2=9=3^2$.

أ) $(1,4,8,9)$ تحقق $1^2+4^2+8^2=1+16+64=9^2$

الرباعيتــان $(1,2,2,3)$ ، $(1,4,8,9)$ همــا رباعيتــان فيثاغوريتــان . بينمــا الرباعيــة $(1,1,1,2)$ ليست رباعية فيثاغوريّة لأنَّ $1^2+1^2+1^2=3\neq 2^2$. كيف نجد رباعيَات فيثاغوريّة ؟

إذا كانــت (a,b,c,d)رباعيــة فيثاغوريــة فإننــا نســتطيع بواســطتها إنتــاج مــالا نهايــة مــن الرباعيــات الفيثاغوريّــة . لأنّ: (na,nb,nc,nd) لكــل n طبيعــي هــي رباعيــة فيثاغوريّــة . لأنَّ : إذا كانــت (a,b,c,d) رباعيــة فيثاغوريّــة فــإن $a^2+b^2+c^2=d^2$. لذلك: $(na)^2+(nb)^2+(nc)^2=n^2(a^2+b^2+c^2)=n^2b^2=(nd)^2$

يســتطيع القــارئ أن يتأكّــد مــن أن الرباعيــات : $(5,10,10,15)$ ، $(11,22,22,33)$ ، $(7,14,14,21)$ هــي رباعيــات فيثاغوريــة. لاحــظ أنَّ هــذه الرباعيــات نتجــت مــن الرباعيــة الفيثاغوريــة $(1,2,2,3)$. مــن هنــا نســتنتج أنّــه يكفــي البحــث عــن رباعيــات فيثاغوريــة أساســية وهي التي لا تنتج عن ضرب رباعية فيثاغورية بعدد طبيعي أكبر من1.

تعريــف: رباعيــة فيثاغوريــة أساســية هــي رباعيّــة فيثاغوريــة بحيــث لا يوجــد عــدد طبيعــي أكبــر مــن 1 تقبــل جميــع حــدودها القســمة عليــه. $(1,2,2,3)$رباعيــة فيثاغوريــة أساســية ، بينما $(2,4,4,6)$ ليست أساسيّة.

نظريّــة : إذا كانــت (a,b,c,d) رباعيّــة فيثاغوريّــة أساســيّة فــإن عــددين مــن بــين الأعــداد a,b,c يجب أن يكونا زوجيين والآخر فردي.

برهــان: بمــا أن الرباعيــة أساســيّة فــلا يمكــن أن تكــون حــدودها الثلاثــة زوجيّــة. لأنَّ فــي هــذا الحالــة ينبغــي أن يكــون d زوجيــاً. لــذلك فــإنَّ جميــع حــدودها تقبــل القســمة علــى 2 . وهــذا

يتعارض مع كون الرباعية أساسيّة . لهذا فإنَّ الحدود a,b,c ليست جميعها زوجية .

فهنالك ثلاث حالات :

أ. a,b,c أعداد فرديّة.

ب. من بين الأعداد a,b,c عددان فرديان والآخر زوجي.

جـ. من بين الأعداد a,b,c عددان زوجيان والثالث فردي.

سنبين أن الحالتين أ وَ ب غير ممكنتين .

الحالة "أ " غير ممكنة: نفرض أن a,b,c جميعها أعداد فردية.

$a=2n+1$, $b=2k+1$, $c=2j+1$ حيث أن: $n\geq 0$, $k\geq 0$, $j\geq 0$ أعداد صحيحة.

نفرض أن $a^2+b^2+c^2=d^2$

لذلك: $(2n+1)^2+(2k+1)^2+(2j+1)^2=d^2$

لذلك: $4n^2+4n+1+4k^2+4k+1+4j^2+4j+1=d^2$

$$\Leftrightarrow \quad 4n(n+1)+4k(k+1)+4j(j+1)+3=d^2$$

$$(*) \qquad \Leftrightarrow 4n(n+1)+4k(k+1)+4j(j+1)+2=d^2-1$$

d يجب أن يكون عدداً فردياً . معلوم أن كل عدد من الصورة $4m(m+1)$ هو من مضاعفات العدد 8 لأنّ $m(m+1)$ حاصل ضرب عددين متتاليين فهو عدد زوجي. كذلك معلوم أن لكل d فردي يكون العدد d^2-1 من مضاعفات العدد 8 (لو فرضنا $d=2m+1$ فإن $d^2-1=4m(m+1)$).

نلاحظ في المعادلة (*) أن الطرف الأيمن يقسم على 8 بدون باقٍ بينما الطرف الأيسر يقسم على 8 والباقي 2. وهذا تناقض أي أن المساواة بينها غير ممكنة.

الحالة (ب) غير ممكنه : نفرض أن a وَ b فرديان وَ c زوجي. نفرض أن :

$a=2n+1$, $b=2k+1$, $c=2t$ حيث أن: $n\geq 0$, $k\geq 0$, $t\geq 1$ أعداد صحيحة.

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (2n+1)^2+(2k+1)^2+(2t)^2 \\ &= 4n^2+4n+1+4k^2+4k+1+4t^2 \\ &= 4(n^2+n+k^2+k+t^2)+2 \end{aligned}$$

العدد الذي حصلنا عليه هو عدد زوجي وهو من الصورة $4m+2$. عدد من هذه الصورة لا يمكن أن يكون مربعاً لعدد صحيح . لأنَّ مربع العدد الفردي هو عدد فردي ومربّع العدد الزوجي هو عدد من مضاعفات العدد 4 .

الحالة (جـ) :هي الحالة المتبقية وهي التي سنفرضها لإيجاد رباعيات فيثاغورية.

نظريّة: كل عدد فردي أكبر من 1 يساوي الفرق بين مربعي عددين طبيعيين .

البرهان:نفرض أنّ a عدداً فرديّاً أكبر من 1. سنبيّن وجود حل للمعادلة $x^2-y^2=a$ ضمن مجموعة الأعداد الطبيعية.

$(x-y)(x+y)=1\cdot a$; $x-y=1$ وَ $x+y=a$ ينتج أن $x=\frac{a+1}{2}$ ، $y=\frac{a-1}{2}$ بما أن a فردي أكبر من 1 فإن x وَ y طبيعيان $a=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2-\left(\frac{a-1}{2}\right)$.

إنتبه: في حالة كون a فردياً اولياً فالحل وحيد . ولكن يوجد أكثر من حل إذا كانت $a>1$ فردياً مؤلّفاً (غير أولي).

نأتي الآن لإيجاد رباعيات فيثاغوريّة أساسيّة . رأينا أنَّ البحث عن رباعيات فيثاغورية أساسيّة سيقتصر على الرباعيات ذات الصورة (a,b,c,d) حيث أن عددين من الأعداد a,b,c زوجيان والآخر فردي . نفرض مثلاً أنَّ a زوجي ، b فردي ، c زوجي .(d حتماً هو عدد فردي) .

$a^2+b^2+c^2=d^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=d^2-c^2$.

حسب الشروط فإنَّ العدد a^2+b^2 هو عدد فردي .وحسب النظرية السابقة من المؤكّد وجود حل لهذه المعادلة. لأن كل عدد فردي يساوي الفرق بين مربعي عددين طبيعيين . نفرض أن $k=a^2+b^2$. لذلك $d^2-c^2=k \Leftrightarrow (d-c)(d+c)=k$. إحدى الإمكانيات هي $d-c=1$ وَ $d+c=k$. لذلك فإنَّ :

$d=\frac{k+1}{2}$ وَ $c=\frac{k-1}{2}$. أي أن $d=\frac{a^2+b^2+1}{2}$ وَ $c=\frac{a^2+b^2-1}{2}$.

أمثلة:

1) $a=2$ ، $b=3$. لذلك $d=\frac{4+9+1}{2}=7$ ، $c=\frac{4+9-1}{2}=6$. الرباعيّة $(2,3,6,7)$ هي رباعية فيثاغورية أساسيّة.

2) جد جميع الرباعيات الفيثاغورية ذات الصورة $(6,3,c,d)$.

حل: $6^2+3^2+c^2=d^2$

$45=36+9=d^2-c^2 \Leftrightarrow (d-c)(d+c)=45$. نحلل العدد 45 لحاصل ضرب عددين مختلفين . إمكانيات هي:

$$\begin{cases} d-c=1 \\ d+c=45 \end{cases} \qquad \begin{cases} d-c=3 \\ d+c=15 \end{cases} \qquad \begin{cases} d-c=5 \\ d+c=9 \end{cases}$$

$$(c=22,d=23) \quad , \quad (c=6,d=9) \quad , \quad (c=4,d=7)$$

نحصل على الرباعيات الفيثاغورية: $(6,3,22,23)$ ، $(6,3,6,9)$ ، $(6,3,4,7)$

الرباعية $(6,3,6,9)$ ليست رباعية أساسيّة بينما الرباعيتان الأخريان فهما رباعيتان فيثاغوريتان أساسيتان .