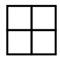
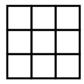
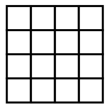
عدد المربعات التي تظهر في مربّع مجزّأ

في الشكل □ يوجد مربع واحد

في الشكل  نلاحظ 5 مربعات (المربعات الداخلية 4 والمربع الكبير)

في الشكل  نلاحظ 14 مربعاً . توجد 9 مربعات طول الضلع وحدة واحدة . توجد 4 مربعات طول الضلع وحدتان. يوجد مربع واحد طول ضلعه 3 وحدات.

في الشكل  يوجد 30 مربعاً. عدّها !

نرتب النتائج التي وجدناها في جدول:

طول الضلع بالوحدات	عدد المربعات	صورة أخرى لعدد المربعات
1	1	1^2
2	5	1^2+2^2
3	14	$1^2+2^2+3^2$
4	30	$1^2+2^2+3^2+4^2$

نستنتج من الجدول أن عدد المربعات عندما يكون طول ضلع المربع 10 وحدات هو: $1^2+2^2+3^2+4^2+........+10^2$. وعند حساب هذا المجموع باستعمال الحاسبة نجد أنّه يساوي 385. وعندما يكون طول ضلع المربع 100 وحدة فإن عدد المربعات يساوي $1^2+2^2+3^2+4^2+........+100^2$، وطريقة الحساب تطول كثيراً. (الاستنتاج صحيح وهو بحاجة إلى برهان. لا مكان للبرهان هنا!) هذا يحتّم علينا إيجاد قانون يسهّل حساب هذا المجموع الطويل.

نحن نعلم أنّ $1+2+3+4.....+100=\frac{100\cdot 101}{2}=5050$

وبشكل عام : $1+2+3+4.....+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

يخطئ القارئ الذي يظن أنَّ : $1^2+2^2+3^2+4^2.....+n^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

فهذا غير صحيح . انتبه أنّ $1^2+2^2 \neq (1+2)^2$ وأنَّ: $1^2+2^2+3^2 \neq (1+2+3)^2$

نأتي الآن لاكتشاف قانون لحساب $1^2+2^2+3^2+4^2.....+n^2$.

نسمي هذا المجموع T_n . أي أن $T_n=1^2+2^2+3^2+4^2.....+n^2$

ونسمي $S_n=1+2+3+4.....+n$.

نبني الجدول الآتي:

n	S_n	T_n	$\frac{T_n}{S_n}$
1	1	1	$1=\frac{3}{3}$
2	3	5	$\frac{5}{3}$
3	6	14	$\frac{7}{3}$
4	10	30	$3=\frac{9}{3}$
5	15	55	$\frac{11}{3}$
6	21	91	$\frac{13}{3}$
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
n	S_n	T_n	$\frac{T_n}{S_n}$

في العمود الرابع تظهر المتوالية: $\frac{3}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3},\frac{9}{3},\frac{11}{3},\frac{13}{3},.........,\frac{T_n}{S_n}$

ومن السهل اكتشاف قانونها . المقام لكل منها هو 3 . ومتوالية البسوط هي المتوالية: 3,5,7,9,11,13,... والتي قانونها $2n+1$.

لذلك : $\frac{T_n}{S_n}=\frac{2n+1}{3}$

لذلك: $T_n = \frac{(2n+1)\cdot S_n}{3}$

لكن $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

لذلك: $T_n = \frac{(2n+1)(n+1)n}{3\cdot 2}$

أي أنَّ : $T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

استنتجتا أنَّ :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 ..... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

عندما يكون n=100 فإنّ المجموع يساوي 338350.