.35 جد عددين طبيعيين a و b بحيث أنّ $a^2-b^2=36$. كم حلاً يوجد؟

.36 لأيّة قيم c يوجد عددان طبيعيان a و b بحيث أنّ $a^2-b^2=c$ ولأيّها لا يوجد حلّ؟ ولأيّها يوجد أكثر من حلّ؟ (استنتج جوابك من حلّك للتمارين السابقة).

.37 **برهن:** كل عدد فردي أكبر من 1 يساوي الفرق بين مربعي عددين صحيحين.

برهان: نرمز للعدد بالحرف n. علينا أن نبين أنه يوجد عددان x و y صحيحان بحيث أن $x^2-y^2=n$

وهذا يكافئ: $(x-y)(x+y)=n$. يوجد عددان صحيحان مختلفان حاصل ضربهما n (لأنه أكبر من 1) مثلًا: 1 و n (عندما العدد أولي توجد إمكانية وحيدة. لكن عندما العدد فردي غير أولي فتوجد أكثر من إمكانية. عدد الإمكانيات يتعلق بالعدد). لذلك فإن:

$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=n \end{cases}$ من حل منظومة المعادلات ينتج أن:

$x=\frac{n+1}{2}$ و $y=\frac{n-1}{2}$. العددان صحيحان لأن n فردي. أكّدنا وجود عددين يحققان الشرط. (تأكّد من أن: $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2=n$.

.38 برهن: كل عدد طبيعي أكبر من 4 ومن مضاعفات 4 يساوي الفرق بين مربعي عددين صحيحين.

(إرشاد: فكرة البرهان مشابهة للفكرة في السؤال السابق. افرض أن العدد هو n وأنّه من مضاعفات 4 وهو أكبر من 4. لذلك يوجد عدد طبيعي k بحيث أن $n=4k$. نحل المعادلة: $x^2-y^2=4k$ وهي تكافئ: $(x-y)(x+y)=4k$ وهذا يكافئ:

$\left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)=k$. أكمل الحل............................

39. برهن أن:

$$(3+2)\cdot(3^2+2^2)\cdot(3^4+2^4)\cdot(3^8+2^8)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot(3^{512}+2^{512})=3^{1024}-2^{1024}$$

(عند ضرب الطرفين في $(3-2)$ وتستعين بقانون الفرق بين مربعين ستعرف حقيقة الأمر، أنظر السؤال القادم).

40. برهن أن:

$$(x+y)\cdot(x^2+y^2)\cdot(x^4+y^4)\cdot(x^8+y^8)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot(x^{512}+y^{512})=\frac{x^{1024}-y^{1024}}{x-y}$$

نرمز $A_1=x+y$. عندما نضرب الطرفين في $x-y$ فنحصل على:

$(x-y)A_1=(x-y)(x+y)=x^2-y^2$. لذا فإن: $(x+y)=\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$.

عندما نرمز: $A_2=(x+y)(x^2+y^2)$. نلاحظ أن

$$A_2=A_1(x^2+y^2)=\left(\frac{x^2-y^2}{x-y}\right)(x^2+y^2)=\frac{x^4-y^4}{x-y}$$

عندما نرمز: $A_3=(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$. فنلاحظ أن:

$$A_3=A_2(x^4+y^4)=\left(\frac{x^4-y^4}{x-y}\right)(x^4+y^4)=\frac{x^8-y^8}{x-y}.$$

عندما نرمز: $A_4=(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)$. فنلاحظ أن:

$$A_4=A_3(x^8+y^8)=\left(\frac{x^8-y^8}{x-y}\right)(x^8+y^8)=\frac{x^{16}-y^{16}}{x-y}.$$

هذا التفكير الاستنتاجي (الاستقرائي) يقودنا إلى اكتشاف القاعدة التالية:

$$(x+y)\cdot(x^2+y^2)\cdot(x^4+y^4)\cdot(x^8+y^8)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\left(x^{(2^n)}+y^{(2^n)}\right)=\frac{x^{(2^{n+1})}-y^{(2^{n+1})}}{x-y}$$

41. أ. برهن أن المساواة:

$$(10+1)\cdot(10^2+1)\cdot(10^4+1)\cdot(10^8+1)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot(10^{64}+1)=11111\ldots\ldots111$$

صحيحة إذا وفقط إذا كان عدد الأرقام 1 في الطرف الأيمن 128.

ب. برهن أن المساواة:

$$(10+1)\cdot(10^2+1)\cdot(10^4+1)\cdot(10^8+1)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\left(10^{(2^n)}+1\right)=11111\ldots\ldots111$$

صحيحة إذا وفقط إذا كان عدد الأرقام 1 في الطرف الأيمن 2^{n+1}.

42. معلوم أن $x+y=11$ وأن $xy=28$ ، بدون أن تجد x و y ، جد x^2+y^2 .

حل: $(x+y)^2=11^2=121$ لذا فإن:

$x^2+y^2=121-2xy=121-2\cdot 28=121-56=65$ لذا فإن $x^2+y^2=65$.

43. معلوم أن $x+y=17$ وأن $xy=66$ ، بدون أن تجد x و y ، جد x^2+y^2 .

44. معلوم أن $x+y=23$ وأن $xy=53$ ، بدون أن تجد x و y ، جد x^2+y^2 .

45. معلوم أن $x+y=30$ وأن $xy=225$ ، بدون أن تجد x و y ، جد x^2+y^2 .

46. معلوم أن $x+y=32$ وأن $xy=260$ ، بدون أن تجد x و y ، جد x^2+y^2 . (هل الجواب معقول! ما السبب!)

47. معلوم أن $x+y=32$ وأن $xy=m$ ، بدون أن تجد x و y ، جد x^2+y^2 بواسطة m.
(متى يكون الجواب معقولًا؟ ما هو الشرط على m ليكون الجواب معقولًا! أكتب الملاحظة الأخيرة بكلمات أخرى على النحو التالي: إذا كان $x+y=a$ فإن xy أصغر أو يساوي ....

48. أ. برهن: إذا كان $x+y=a$ فإن $xy\le\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

برهان:

$$4xy=(x+y)^2-(x-y)^2\le(x+y)^2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad xy\le\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

(يحدث التساوي إذا وفقط إذا تحقق أن $x=y$).

ب. برهن: لكل x و y يتحقق: $\mathrm{xy}\le\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

برهان:

$$0\le(x-y)^2=x^2+y^2-2xy \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2\ge 2xy$$
$$\Leftrightarrow\quad \mathrm{xy}\le\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

(يحدث التساوي إذا وفقط إذا تحقق أن $x=y$).

ج. برهن: لكل x و y يتحقق: $x^2+y^2\ge\frac{1}{2}(x+y)^2$

(يحدث التساوي إذا وفقط إذا تحقق أن $x=y$).

برهان: (نعتمد على المتباينة من الفرع السابق والتي تكافئ: $2\mathrm{xy}\le x^2+y^2$).

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy\le x^2+y^2+x^2+y^2=2(x^2+y^2)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$2(x^2+y^2)\ge(x+y)^2 \quad\Leftrightarrow x^2+y^2\ge\frac{1}{2}(x+y)^2$$

.49 معلوم أن $x+y=28$ وأن $xy=70$ ، بدون أن تجد x و y ، جد $(x-y)^2$.

حل: $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=28^2-4\cdot 70=784-280=504$

.50 معلوم أن $x+y=19$ وأن $xy=33$ ، بدون أن تجد x و y ، جد $(x-y)^2$.

.51 معلوم أن $x+y=27$ وأن $xy=150$ ، بدون أن تجد x و y ، جد x^4+y^4 . (إرشاد: جد أولًا x^2+y^2).

حل:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=27^2-2\cdot150=429$$
$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2=429^2-2\cdot(150)^2=139041$$

.52 معلوم أن $x+y=42$ وأن $xy=402$ ، بدون أن تجد x و y ، جد x^4+y^4. (جواب: 598392)

.53 معلوم أن $x+y=7$ وأن $xy=7$ ، بدون أن تجد x و y ، جد x^4+y^4 ، ثمّ جد x^8+y^8 . (جواب: أ. 1127 ب. 1265327).

.54 معلوم أن $x+y=2$ وأن $xy=0.5$ ، بدون أن تجد x و y ، جد x^4+y^4 ، ثمّ جد x^8+y^8 . (جواب: أ. 8.5 ب. 72.125).

.55 معلوم أن $x+y=14$ وأن $x^2+y^2=130$ ، بدون أن تجد x و y ، جد xy .

حل:

$$14^2=196=(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=130+2xy$$
$$\Leftrightarrow$$
$$2xy=196-130=66 \quad \Leftrightarrow \quad xy=33$$

.56 معلوم أن $x+y=22$ وأن $x^2+y^2=250$ ، بدون أن تجد x و y ، جد xy ، ثمّ جد x^4+y^4 . (جواب: 117 ، 35122).

.57 كتب التلميذ "أ" السؤال التالي وطلب من صديقه "ب" أن يحلّه:

السؤال: معلوم أن $x+y=20$ وأن $x^2+y^2=150$ ، بدون أن تجد x و y ، جد xy .

بعد أن حل التلميذ "ب" المسألة:

$(20^2 = 400 = (x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = 150+2xy \Leftrightarrow xy=125)$

قال له التلميذ "أ": اكتشف الخطأ. قال "ب": لا يوجد خطأ. فقال "أ": حسنًا، جد x^4+y^4.

حلّ "ب" المسألة: $x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2(xy)^2 = 150^2 - 2(125)^2 = -8705$

قال "ب": $x^4+y^4 = -8750$.

قال "أ": وهل هذا معقول؟ قال "ب": كلا غير معقول المقدار x^4+y^4 لا يمكن أن يكون سالبًا.

قال "أ": فأين الخطأ؟ قال "ب": لقد فحصت حساباتي ولم أجد فيها أي خطأ.

قال "أ": صدقت. إن جميع حساباتك صحيحة، لكن ما السرّ في أن تكون النتيجة غير معقولة؟

قال "ب": الخطأ في معطيات المسألة. يجب أن يكون $x^2+y^2 \ge 200$ لأن لكل x و y يتحقق: $x^2+y^2 \ge \frac{1}{2}(x+y)^2$.

.58 معلوم أن $x+y=18$ وأن $x^2+y^2=170$، بدون أن تجد x و y، جد xy، ثمّ جد x^4+y^4. (الجواب: 17042)

.59 معلوم أن $x+y=19$ وأن $x^2+y^2=145$، بدون أن تجد x و y، جد xy، ثمّ جد x^4+y^4.

(معطيات المسألة متناقضة لأنّ: ....)

.60 معلوم أن $x+y=40$ وأن $xy=440$، بدون أن تجد x و y، جد x^2+y^2. (معطيات المسألة متناقضة لأنّ: ....)

.61 معلوم أن $x+y=40$ وأن $xy=180$، بدون أن تجد x و y، جد x^2+y^2. وجد $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. وجد $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$. (جواب: 1240، $\frac{2}{9}$، $\frac{31}{810}$)

.62 معلوم أن $x+y=32$ وأن $xy=220$ ، بدون أن تجد x و y ، جد $|x-y|$. وجد $\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right|$. (جواب: 12 ، $\frac{24}{3025}$).

.63 معلوم أن $x+y=35$ وأن $xy=175$ ، بدون أن تجد x و y ، جد $|x-y|$. وجد $\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right|$. (جواب: $5\sqrt{21}$ ، $\frac{24}{3025}$).

تتم معالجة القضايا الآتية بالاعتماد على المتباينة:

إذا كان $x+y=a$ **فإن** $xy \le \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

(يحدث التساوي إذا وفقط إذا تحقق أن $x=y$ **).**

.64 صواب أم خطأ؟ إذا كان مجموع عددين يساوي 40 فإن حاصل ضربهما أصغر من، أو يساوي العدد 400. (متى تحدث المساواة؟). علل!!

.65 صواب أم خطأ؟ إذا كان مجموع عددين يساوي 70 فإن حاصل ضربهما أصغر من، أو يساوي العدد 1225. (متى تحدث المساواة؟). علل!!

.66 صواب أم خطأ؟ إذا كان مجموع عددين يساوي $2d$ فإن حاصل ضربهما أصغر من، أو يساوي العدد d^2. (متى تحدث المساواة؟). علل!!

.67 صواب أم خطأ؟ إذا كان محيط مستطيل يساوي 200 وحدة قياس فإن مساحة المستطيل أصغر أو تساوي 2500 وحدة مربّعة. (يحدث التساوي إذا وفقط إذا كان المستطيل مربّعاً.

.68 صواب أم خطأ؟ إذا كان محيط مستطيل يساوي $4d$ وحدة قياس فإن مساحة المستطيل أصغر أو تساوي d^2 وحدة مربّعة. (يحدث التساوي إذا وفقط إذا كان المستطيل مربّعًا).

.69 صواب أم خطأ؟ إذا كان محيط مستطيل يساوي p وحدة قياس فإن مساحة المستطيل أصغر أو تساوي $\left(\frac{d}{4}\right)^2$ وحدة مربّعة. (يحدث التساوي إذا وفقط إذا كان المستطيل مربّعًا).

70. برهن: لكل عددين موجبين x و y **يتحقق:** $x+y\geq 2\sqrt{xy}$.

برهان:

طريقة 1: من المتباينة التي برهانها في قرع أ من سؤال 48: $xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ وهي

تكافئ: $\frac{|x+y|}{2}\geq\sqrt{xy}$ وهذا يكافئ $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

(انتبه: بما أن x و y **موجبان فإن** $|x+y|=x+y$).

طريقة 2: بما أن x و y **موجبان فإن:** $x=\left(\sqrt{x}\right)^2$ و $y=\left(\sqrt{y}\right)^2$. **لذلك فإن:**

$$x+y=\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+2\sqrt{x}\sqrt{y}\geq 2\sqrt{x}\sqrt{y}=2\sqrt{xy}$$

(انتبه إلى أن $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq 0$ وهو سبب صواب التبايّن الأخير)

لذا فإن: $x+y\geq 2\sqrt{xy}$. ويحدث التساوي إذا وفقط إذا تحقق $x=y$.

71. صواب أم خطأ؟ **يوجد مستطيل بحيث أن مساحته 100 وحدة مربعة ومحيطة أصغر من 35 وحدة.**

72. صواب أم خطأ؟ **من بين جميع المستطيلات ذات مساحة 625 وحدة مربّعة الأصغر محيطًا هو المربع الذي محيطه 100 وحدة.**

المزيد من التمارين على قوانين الضرب المختصر

1. برهن أنّ: $(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})\times(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})=1$ لكل $a\geq 0$.

2. استعمل السؤال السابق لحساب المجموع الآتي:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$$

حل: نلاحظ أن كل عدد في المجموع هو من الصورة $\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}$. حسب الملاحظة المذكورة فهو يساوي: $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ (العددان $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ و $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$ هما عددان مترافقان، أي أن كل منهما هو مرافق للآخر. بشكل عامّ نعتبر العددين $a-b$ و $a+b$ مترافقين). لذا فإن:

$$=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$$

$$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{4}+\dots\dots\dots\dots+\sqrt{100}-\sqrt{99}$$

$$=-1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\sqrt{4}+\sqrt{5}+\dots\dots\dots\dots-\sqrt{99}+\sqrt{100}$$

$-1+\sqrt{100}=-1+10=9$ (لاحظ أن لكل عدد في المجموع الأخير يوجد مضادّ باستثناء الأول والأخير).

3. سؤال: احسب المجموع:

$$\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{12}}+\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{\sqrt{2500}+\sqrt{2499}}=$$

(الجواب=47)

4. سؤال: جد قيمة x في المعادلة:

$$\frac{1}{\sqrt{17}+\sqrt{16}}+\frac{1}{\sqrt{18}+\sqrt{17}}+\frac{1}{\sqrt{19}+\sqrt{18}}+\frac{1}{\sqrt{20}+\sqrt{19}}+\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=66$$

(الجواب=4899)

5. سؤال: جد قيمة x في المعادلة:

$$\frac{1}{\sqrt{37}+\sqrt{36}}+\frac{1}{\sqrt{38}+\sqrt{37}}+\frac{1}{\sqrt{39}+\sqrt{38}}+\frac{1}{\sqrt{40}+\sqrt{41}}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=84$$

6. **سؤال: جد قيمة x في المعادلة:**

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{x+91}+\sqrt{x+90}}=7$$

حل: ينتج من المتطابقة $\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\right)=1$ أنّ :

$$\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}=-\sqrt{a}+\sqrt{a+1} .$$

لذلك فإنّ:
$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=-\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=-\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$$

.

.

$$\frac{1}{\sqrt{x+91}+\sqrt{x+90}}=-\sqrt{x+90}+\sqrt{x+91}$$

المعادلة المعطاة تكافئ:

$$-\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}-\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}+\ldots..-\sqrt{x+90}+\sqrt{x+91}=7$$

لكل حد باستثناء الحدّ الأوّل والأخير يوجد حدّ مضادّ (جمع تلسكوبي) لذلك تختزل جميع الحدود الواقعة ما بين الحد الأول والأخير، لذلك فإنّ المعادلة الأخيرة تكافئ المعادلة:

$$-\sqrt{x}+\sqrt{x+91}=7$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x+91}=7+\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad x+91=49+14\cdot\sqrt{x}+x$$

$$x=9 \quad \Leftrightarrow \quad 3=\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad 42=14\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow$$

7. سؤال: جد قيمة x في المعادلة:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{49x+99}+\sqrt{49x+98}}=43$$

8. تأكّد من أنّ : $(\sqrt{a+3}+\sqrt{a})\times(\sqrt{a+3}-\sqrt{a})=3$ لكل $a\geq 0$ ، واحسب بواسطتها:

$$\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{10}}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{97}}$$

9. احسب:

$$\frac{1}{\sqrt{103}+\sqrt{100}}+\frac{1}{\sqrt{106}+\sqrt{103}}+\frac{1}{\sqrt{109}+\sqrt{106}}+\frac{1}{\sqrt{112}+\sqrt{109}}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{961}+\sqrt{958}}$$

10. احسب (باستعمال فكرة مشابهة):

$$\frac{1}{\sqrt{21}+\sqrt{16}}+\frac{1}{\sqrt{26}+\sqrt{21}}+\frac{1}{\sqrt{31}+\sqrt{26}}+\frac{1}{\sqrt{36}+\sqrt{31}}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{256}+\sqrt{251}}$$

الأسئلة التالية لا تتعلّق بالأسئلة السابقة. تعتمد فكرة البرهان على الحقيقتين التاليتين:

1. مجموع عدد من الأعداد أكبر من عددها ضرب العدد الأصغر من بينها.
2. مجموع عدد من الأعداد أصغر من عددها ضرب العدد الأكبر من بينها.

11. أثبت أنّ:

(أ) $\frac{1}{2} < \frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+\frac{1}{104}+\frac{1}{105}+\dots\dots\dots+\frac{1}{200} < 1$

(ب) $\frac{1}{11} < \frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\frac{1}{1003}+\frac{1}{1004}+\frac{1}{1005}+\dots\dots\dots+\frac{1}{1100} < 0.1$

(ج) $\frac{1}{4} < \frac{1}{51}+\frac{1}{53}+\frac{1}{55}+\frac{1}{57}+\frac{1}{59}+\dots\dots\dots+\frac{1}{99} < \frac{1}{2}$

(د) $\frac{1}{4} < \frac{1}{83}+\frac{1}{85}+\frac{1}{87}+\frac{1}{89}+\frac{1}{91}+\dots\dots\dots+\frac{1}{181} < \frac{5}{8}$

(هـ) $\frac{1}{6} < \frac{1}{120}+\frac{1}{123}+\frac{1}{126}+\frac{1}{129}+\frac{1}{132}+\dots\dots\dots+\frac{1}{237} < \frac{1}{3}$

(و) $\frac{1}{2} < \frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\frac{1}{2^n+3}+\frac{1}{2^n+4}+\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{2^{n+1}} < 1$

12. هل يوجد عدد صحيح بحيث يكون تربيعه عدداً مجموع أرقامه 50 ؟ اشرح طريقة الحل.

حل: مربع أي عدد صحيح إما أن يقسم على 9 أو لا يقسم على 3 وعندما لا يقسم على 3 فإنَّ تربيعه يقسم على 3 والباقي 1. لأنّ:

$$(3k)^2 = 9\left(k^2\right)$$

$$(3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3\left(3k^2+2k\right)+1$$

$$(3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3\left(3k^2+4k+1\right)+1$$

لذلك فلا يوجد عدد يحقق شروط المسألة. لأن كل عدد مجموع أرقامه 50 يقسم على 3 والباقي 2.