المستقيمات الخاصّة في المثلث

د. علي عثمان

أقصد بالمستقيمات الخاصّة في المثلث المستقيمات: **منصفات الزوايا والمتوسطات والارتفاعات.**

تعريف: عقب مستقيم خاصّ خارج من رأس المثلث هو نقطة تقاطعه مع ضلع المثلث المقابل لذلك الرأس.

من المعروف أن المستقيمات الخاصّة الخارجة من رأس المثلث متساوي الساقين هي نفس المستقيم فلها نفس العقب على قاعدة المثلث. والعكس صحيح، فلو كان لمستقيمين خاصين في مثلث نفس العقب فإنّ المثلث متساوي الساقين.

المسألة الأولى التي سنعالجها هي حول مواضع أعقاب المستقيمات الخاصّة الخارجة من نفس رأس المثلث. سنعالج المسالة بطريقتين، الطريقة الأولى هندسيّة-تحليلية بسيطة، أمّا الثانية فهي طريقة حسابية-جبرية مطوّلة. تكمن أهمية الطريقة الثانية في إيجاد قوانين لحسابات هندسية في المثلث. ففي هذه المادّة تأكيد على **القيمة الرياضية لتعدد الطرق لحل المسائل الرياضية.**

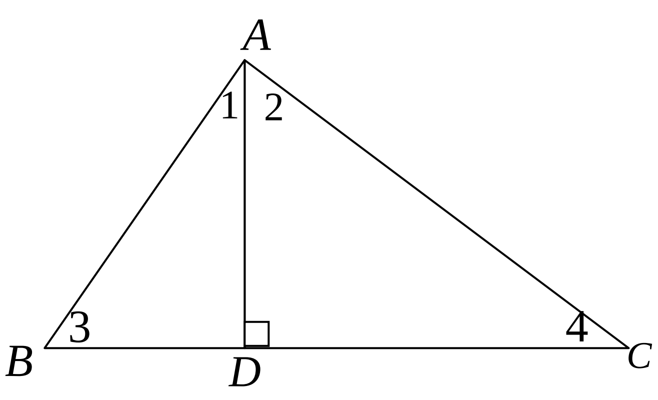
اتفاق: في هذه المادّة عندما يعطى مثلث ABC فإنّ رؤوسه هي النقاط $A\ ,B\ ,C$

وزواياه هي على التناظر $\sphericalangle C\ ,\sphericalangle B\ ,\sphericalangle A$ وأطوال أضلاعه على التناظر $c\ ,\ \mathrm{b}\ ,\ a$.

(يناظر كل رأس طول الضلع الذي يقابله أي أنّ $\overline{AB}=\mathrm{c}\ ,\ \overline{BC}=\mathrm{a}\ ,\ \overline{AC}=b$).

الطريقة الأولى: تعتمد على القضيتين الآتيتين:

قضيّة (أ) : إذا كان ABC مثلثاً بحيث أنَّ $c<b$ وإذا كان AD ارتفاع المثلث الخارج من الرأس A ويقع داخل المثلث فإنَّ $\sphericalangle A_1<\sphericalangle A_2$ (شكل (1)).

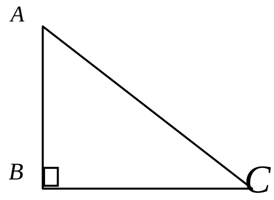


(شكل (1))

برهـــــان: $\sphericalangle B_3 > \sphericalangle C_4$ لأنَّ $b > c$. لــــــذلك $90^\circ - \sphericalangle B_3 < 90^\circ - \sphericalangle C_4$. لكـــــن $\sphericalangle A_1 = 90^\circ - \sphericalangle B_3$ وَ $\sphericalangle A_2 = 90^\circ - \sphericalangle C_4$ لذلك $\sphericalangle A_1 < \sphericalangle A_2$.

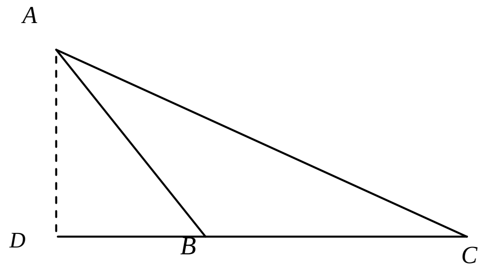
ملاحظة: توجد حالتان أخريان بالنسبة للارتفاع وهما:

1) AD ينطبق على AB (أي أنَّ $B=D$) (شكل 2). وهذا يحدث عندما $\sphericalangle ABC = 90^\circ$.



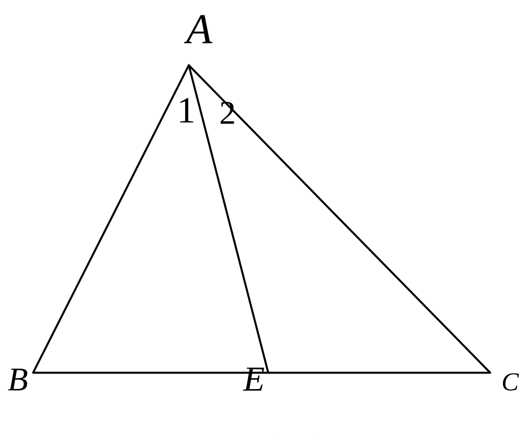
شكل (2)

2) $A\ D$ يقع خارج المثلث عندما $\sphericalangle ABC > 90^\circ$ (شكل 3).

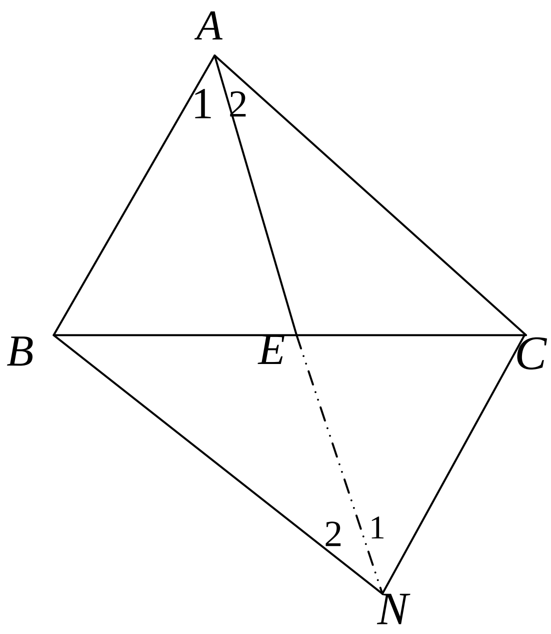


(شكل 3)

قضيّة (ب): إذا كـان ABC مثلثـاً بحيـث أنَّ $AB < AC$ وإذا كـان AE المتوسـط للضـلع BC فإنَّ $\sphericalangle A_1 > \sphericalangle A_2$ (أنظر الشكل 4).



(الشكل 4)



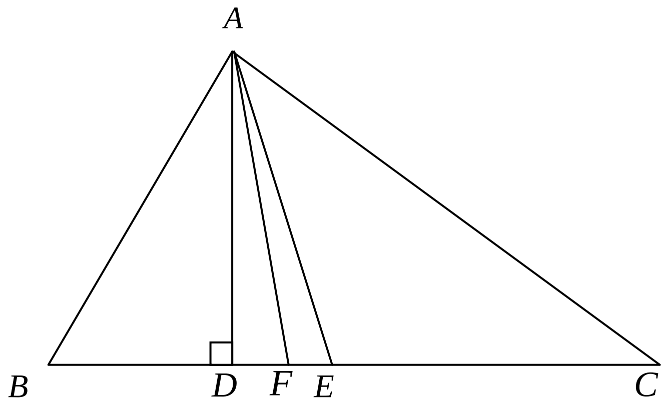
برهنة: نمد AE على امتداده من جهة E بقدر طوله حتى النقطة N . الشكل الرباعي $ABNC$ هو متوازي أضلاع لأن قطريه ينصّف كل منهما الآخر. لذلك $CN = AB$ وَ $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle N_1$

ننظر في المثلث ANC . بما أن $CN = c < b$ فإن $\sphericalangle A_2 < \sphericalangle N_1 = \sphericalangle A_1$ أي أنَّ $\sphericalangle A_2 < \sphericalangle A_1$.

نتيجة: (ترتيب أعقاب المستقيمات الخاصّة).

ليكن ABC مثلثاً بحيث أنَّ $c < b$ وليكن:

AD الارتفاع النازل من A على BC، AE المتوسط للضلع BC وَ AF منصف الزاوية A فإن ترتيب الإعقاب D وَ E وَ F نسبة لِ B وَ C هو : (B, D, F, E, C) أي أن الترتيب هو كما يبدو في الشكل 6 :



(الشكل 6)

ملاحظة: عندما تكون زاوية B قائمة فيكون الترتيب (B,F,E,C) لانّ $B = D$. عندما تكون زاوية B منفرجة فيكون الارتفاع خارج المثلث فيكون الترتيب (D,B,F,E,C).

الطريقة الثانية: تعتمد على حساب أطوال القطع BD ، BE ، BF.

(1) حساب طول BD.

ليكن ABC مثلثاً وليكن AD الارتفاع النازل على الضلع BC ويقع داخل المثلث.

نرمز $\overline{AB} = c$ وَ $\overline{AC} = b$ وَ $\overline{BC} = a$ وَ $\overline{BD} = x$ و $DC = a - x$.

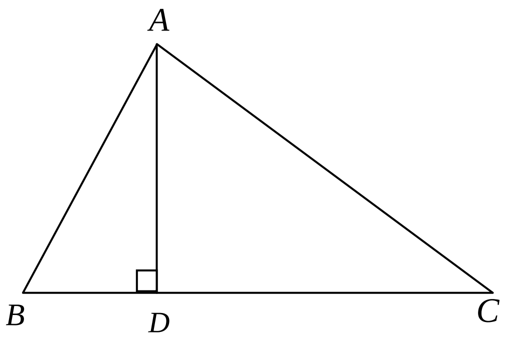
حسب **نظرية فيثاغورس** فإنَّ: $\overline{AD}^2 = c^2 - x^2$ وأيضاً $\overline{AD}^2 = b^2 - (a-x)^2$

لذلك فإن:

$$\Leftrightarrow c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2$$

$$c^2 - b^2 = x^2 - (a-x)^2$$

$$x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$$



(الشكل 7)

لذلك فإنَّ :

$$\overline{BD} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

وبسهولة نستنتج أنَّ:

$$\overline{DC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

$$\boxed{\overline{BD} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \quad \text{و} \quad \overline{DC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}}$$

في هذه المناسبة يمكننا حساب طول $\overline{AD}$ (ارتفاع المثلث) كدالة لأطوال أضلاع المثلث:

$$\overline{AD}^2=c^2-\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)^2=\left(c+\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)\left(c-\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)$$
$$=\left(\frac{2ac+a^2-b^2+c^2}{2a}\right)\cdot\left(\frac{2ac-a^2+b^2-c^2}{2a}\right)=\frac{\left[(a+c)^2-b^2\right]\cdot\left[b^2-(a-c)^2\right]}{4a^2}$$
$$=\frac{(a+c+b)(a+c-b)(b-a+c)(b+a-c)}{4a^2}$$

لو رمزنا $p=\frac{a+b+c}{2}$ فإنَّ:

$$\overline{AD}^2=\frac{2p\cdot(2p-2b)(2p-2a)(2p-2c)}{4a^2}$$
$$=\frac{4\cdot p\cdot(p-b)(p-a)(p-c)}{a^2}$$

أي أنَّ:

$$\overline{AD}=\frac{2}{a}\cdot\sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)}$$

نتيجة:

مساحة المثلث ABC تساوي $\sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)}$.

هذه النتيجة **هي قانون هيرون** لحساب مساحة المثلث

قانون هيرون:

إذا كانت a,b,c أطوال أضلاع مثلث وَ $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ فإنَّ

مساحة المثلث= $\sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)}$

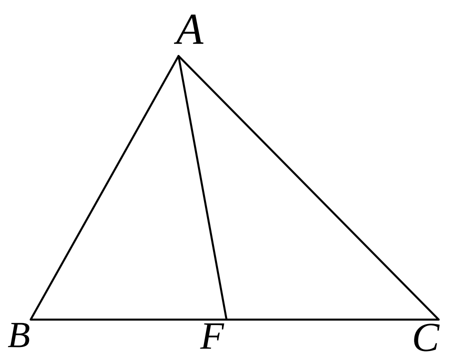
برهان:

$$S = \frac{1}{2}\cdot \overline{BC}\cdot \overline{AD}$$ = مساحة المثلث

$$S = \frac{1}{2}\cdot a \cdot \frac{2}{a}\cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(2) حساب طول BF ، حيث أنَّ AF هو منصف الزاوية A .

نعتمد على نظرية **منصّف الزاوية**: "منصّف الزاوية يقسم الضلع المقابل إلى قسمين النسبة بينهما تساوي النسبة بين ضلعي الزاوية"



لو رمزنا كما سبق:

$$\overline{CF} = a - y\ ,\overline{BF} = y \quad \text{وَ} \quad \overline{BC} = a\ \ ,\overline{AC} = b\ \ ,\overline{AB} = c$$

فينتج حسب النظرية أنَّ:

$$by = ac - cy \Leftrightarrow \frac{y}{a-y} = \frac{c}{b}$$

$$\overline{BF} = y = \frac{ac}{b+c} \Leftrightarrow (b+c)y = ac \Leftrightarrow$$
$$\overline{CF} = a - y = a - \frac{ac}{b+c} = \frac{ab}{b+c}$$

(3) إذا كـان ABC مثلثـاً بحيـث أن $\overline{AB} < \overline{AC}$ وإذا كانـت النقـاط D,E,F هـي أعقـاب المستقيمات الخاصة **منصف زاوية** A ، المتوسط للضلع BC ، **الارتفاع النازل** من الرأس A على التناظر و AD داخل المثلث فإنَّ: $\overline{BD} < \overline{BF} < \overline{BE}$.

برهان:

حسب نفس الرموز التي استعملت في (1) وَ(2) وحسب النتائج من (1) وَ (2):

1. نبرهن أنّ $\overline{BF} > \overline{BD}$**.** وفعلاً:

$$\overline{BF} = \frac{ac}{b+c} \quad \text{وَ} \quad \overline{BD} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

$$\overline{BF} - \overline{BD} = \frac{ac}{b+c} - \frac{a^2-b^2+c^2}{2a} = \frac{2a^2c-(b+c)(a^2-b^2+c^2)}{2a(b+c)}$$

$$= \frac{a^2c-ba^2+b^3-bc^2+cb^2-c^3}{2a(b+c)} = \frac{(c-b)a^2+b(b^2-c^2)+c(b^2-c^2)}{2a(b+c)}$$

$$= \frac{(b^2-c^2)(b+c)-(b-c)a^2}{2a(b+c)} = \frac{(b-c)\left[(b+c)^2-a^2\right]}{2a(b+c)}$$

بمـا أنَّ $b > c$ وَ $b+c > a$ (لأنَّ مجمـوع أي ضـلعين فـي المثلـث أكبـر مـن الثالـث) ، فـإنَّ المقدار الأخير موجب . أي أن $\overline{BF} > \overline{BD}$.

2. نبرهن الآن أنَّ $\overline{BF} < \overline{BE}$**.** وفعلاً :

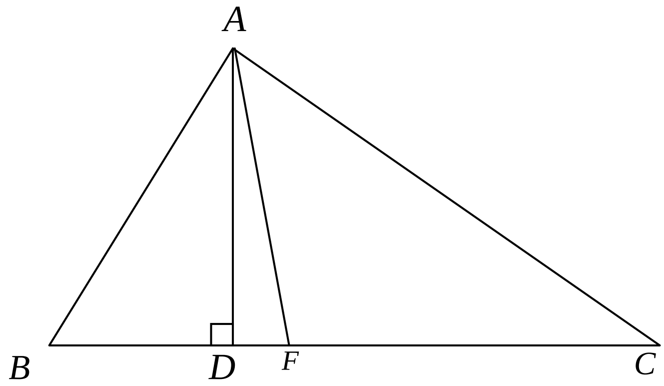
$$\overline{BF} - \overline{BE} = \frac{ac}{b+c} - \frac{a}{2} = \frac{2ac-ab-ac}{2(b+c)} = \frac{ac-ab}{2(b+c)} = \frac{a(c-b)}{2(b+c)} < 0$$

لذلك فإنَّ $\overline{BF} < \overline{BE}$. بهذا تمّ إثبات القضيّة.

واضح أن طريقـة البرهـان الأولـى أسـهل ولكـن الطريقـة الثانيـة أفادتنـا بإيجـاد قـوانين مهمـة فـي الهندسة.

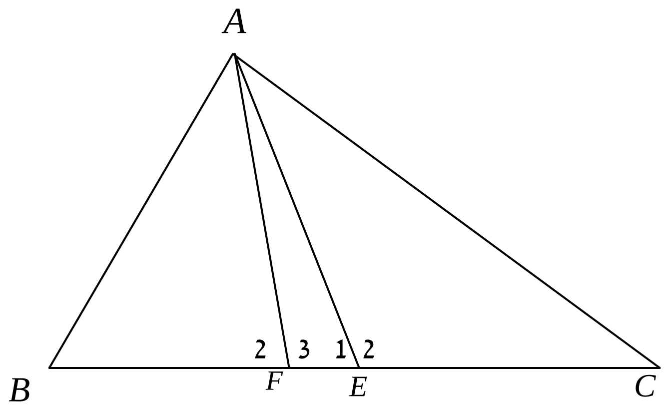
نأتي الآن للمقارنة بين أطوال المستقيمات الخاصّة.

قضيّة جـ: $\overline{AD} < \overline{AF} < \overline{AE}$. (أي أنّ : المتوسط > منصّف الزاوية > الارتفاع، بحيث أنّ ثلاثتهم يخرجون من نفس الرأس).



طريقة أولى للبرهان:

من الواضح أن $\overline{AD}<\overline{AF}$ لأن الضلع الأكبر يقابل الزاوية الكبرى (الوتر في المثلث القائم اكبر أضلاع المثلث) . واضح أن $\sphericalangle E_1<90^\circ, \sphericalangle F_2<90^\circ$.لذلك فإن $\sphericalangle F_3>90^\circ>\sphericalangle E_1$. لذلك فإن $\overline{AF}<\overline{AE}$. واضح أنّ $\overline{AD}<\overline{AF}$ لأنّه عمود.



أمّا الشخص الذي يميل للبراهين الجبريّة ولم تخطر له تلك الفكرة فإنّه يلجأ للبرهان عن طريق حساب طول كل واحد من المستقيمات الخاصّة. سنباشر في حسابها .

حساب أطوال المتوسطات في المثلث

حسب نفس المعطيات السابقة، نحسب الآن $\overline{AE}$.

مما تقدّم فقد وجدنا أن: $\overline{AD}=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

وصورة أُخرى:

$$\overline{AD}^2=c^2-\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)^2.$$

حسب نظرية فيثاغورس فإنّ: $\overline{AE}^2=\overline{AD}^2+\overline{DE}^2$ لذلك:

$$\overline{AE}^2=c^2-\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)^2+\left(\frac{a}{2}-\overline{BD}\right)^2$$

$$=c^2-\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)^2+\left(\frac{a}{2}-\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)^2$$

$$=c^2-\frac{a^4+(b^2-c^2)^2-2a^2(b^2-c^2)}{4a^2}+\frac{(b^2-c^2)^2}{4a^2}$$

$$=\frac{4a^2c^2-a^4+2a^2b^2-2a^2c^2}{4a^2}=\frac{1}{4}\left(2(c^2+b^2)-a^2\right)$$

لذلك:

$$\overline{AE}=\frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+b^2)-a^2}$$

بهذا نكون قد وجدنا أنّ: طول المستقيم المتوسط للضلع الذي طوله a في المثلث الذي أطوال أضلاعه c,b,a يساوي: $\frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+b^2)-a^2}$

نستنتج أنّ:

قانون أطوال المتوسطات في المثلث

إذا رمزنا بـ m_c, m_b, m_a لأطوال المتوسطات لأضلاع المثلث التي أطوالها c,b,a على التناظر فإنّ:

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2}$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$$

تمرين:

i. **احسب** أطوال المتوسطات لأضلاع المثلث الذي أضلاعه 6 وحدات ، 8 وحدات، 10 وحدات. ثمّ **احسب** مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه تساوي أطوال المتوسطات.

ii. نفس السؤال بالنسبة للمثلث الذي أضلاعه 13 وحدة، 14 وحدة، 15 وحدة.

iii. أطوال المتوسطات لأضلاع مثلث هي 15 وحدة، 41 وحدة، 52 وحدة. **احسب** أطوال أضلاع المثلث. **احسب** النسبة بين مساحة المثلث الأصلي وبين مساحة المثلث الذي تكوّنه المتوسطات.

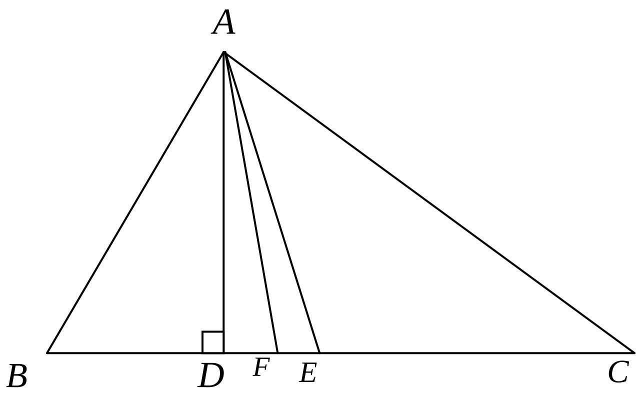
iv. **برهن** أنّ النسبة بين مساحة المثلث الذي تكونه متوسطات مثلث معلوم وبين مساحة المثلث المعلوم هي 3:4. برهن بطريقة هندسية بسيطة (الطريقة الجبرية فيها حسابات كثيرة ومعقّدة).

v. احسب ، بسهولة، مساحة المثلث الذي يتمّ إنشاؤه من متوسطات أضلاع المثلث الذي أضلاعه 10 وحدات، 24 وحدة، 26 وحدة.

vi. احسب ، بسهولة، مساحة المثلث الذي يتمّ إنشاؤه من متوسطات أضلاع المثلث الذي أضلاعه 30 وحدة ، 82 وحدة، 104 وحدة.

حساب أطوال منصفات الزوايا في المثلث

حسب نفس المعطيات السابقة:



$$\overline{AF}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DF}^2$$

$$= c^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)^2 + \left(\frac{(b-c)((b+c)^2 - a^2)}{2a(b+c)}\right)^2$$

$$= \frac{c}{(b+c)^2}\left(2cb - a^2 + b^2 + c^2\right) = \frac{cb}{(b+c)^2}\left((c+b)^2 - a^2\right)$$

$$= \frac{cb}{(b+c)^2}(c+b+a)(c+b-a)$$

$$= \frac{cb \cdot 2p \cdot (2p - 2a)}{(b + c)^2} = \frac{4cb}{(b + c)^2} \cdot p(p - a)$$

لذلك فإنَّ: $\overline{AF} = \frac{2\sqrt{cb}}{b + c} \cdot \sqrt{p(p - a)}$

بهذا وجدنا:

<u>قانون أطوال منصفات زوايا المثلث</u>

لتكن L_A , L_B , L_C أطوال منصفات الزوايا $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$ في المثلث ABC على التناظر فإنّ:

$$L_A = \frac{2\sqrt{bc}}{b + c} \cdot \sqrt{p(p - a)}$$

$$L_B = \frac{2\sqrt{ac}}{a + c} \cdot \sqrt{p(p - b)}$$

$$L_C = \frac{2\sqrt{ab}}{a + b} \cdot \sqrt{p(p - c)}$$

حيث أنّ أطوال أضلاع المثلث المقابلة للزوايا $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$ هي على التناظر a , b , c.

سؤال: برهن:

1) $\overline{AF}^2 < \overline{AE}^2$ **(منصف الزاوية في المثلث أصغر من المتوسط الخارج من رأس الزاوية).**

2) إذا كان $L_A = L_B$ فإنَّ $a = b$.

قضية د: إذا كانت a, b, c **أضلاع مثلث وتحقق** $a \le b \le c$ **فإن** $m_a \ge m_b \ge m_c$.

برهان: يكفي أنّ نبرهن أنه إذا كان $a \le b$ فإن $m_a \ge m_b$. نفرض أن $a \le b$:

$$m_a^2 - m_b^2 = \frac{1}{4}\left[2(b^2 + c^2) - a^2 - 2(a^2 + c^2) + b^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[3b^2 - 3a^2\right] = \frac{3}{4}\left(b^2 - a^2\right) \ge 0$$

لذلك $m_a^2 \ge m_b^2$ لذلك $m_a \ge m_b$.

قضيّة هـ: إذا كانت a,b,c **أضلاع مثلث وتحقق** $a \le b \le c$ **فإن** $h_a \ge h_b \ge h_c$

(حيث أنّ $h_a =$ **الارتفاع النازل على الضلع الذي طوله** a **).**

برهان:

مساحة المثلث:

$$\frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ah_a = S$$

$$h_c = \frac{2S}{c},\ h_b = \frac{2S}{b},\ h_a = \frac{2S}{a} \Leftrightarrow$$

لكن: $a \le b \le c$

$$\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b} \ge \frac{1}{c} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2S}{a} \ge \frac{2S}{b} \ge \frac{2S}{c} \Leftrightarrow$$

$$.h_a \ge h_b \ge h_c \Leftrightarrow$$

قضية و: إذا كان $a \le b \le c$ **فإن** $L_A \ge L_B \ge L_C$.

برهان:

$$L_A{}^2 - L_B{}^2 = \left(\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)}\right)^2$$

$$= 4cp \cdot \left(\frac{b(p-a)}{(b+c)^2} - \frac{a(p-b)}{(a+c)^2}\right)$$

$$= 4cp \cdot \left(\frac{b(b+c-a)}{2(b+c)^2} - \frac{a(a+c-b)}{2(a+c)^2}\right)$$

$$= 2cp \cdot \left(\frac{b}{b+c} - \frac{ab}{(b+c)^2} - \frac{a}{a+c} + \frac{ab}{(a+c)^2}\right)$$

$$= 2cp \cdot \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{a+c} + \frac{ab}{(b+c)^2} - \frac{ab}{(a+c)^2}\right)$$

$$= 2cp \cdot \left(\frac{b(a+c) - a(b+c)}{(a+c)(b+c)} + ab \left(\frac{(b+c)^2 - (a+c)^2}{(a+c)^2 (b+c)^2} \right) \right)$$

$$= 2cp \cdot \left(\frac{c(b-a)}{(a+c)(b+c)} + ab \; \frac{(b-a)(a+b+2c)}{(a+c)^2 (b+c)^2} \right)$$

$$= 2cp \cdot (b-a) \left(\frac{c}{(a+c)(b+c)} + ab \; \frac{(a+b+2c)}{(a+c)^2 (b+c)^2} \right)$$

واضح أنَّ إشارة المقدار الأخير تتعلق فقط بإشارة $b-a$ لأن باقي المقادير موجبة. فإذا كان $a \le b$ فإن إشارة المقدار غير سالبة أي أن $L_A{}^2 - L_B{}^2 \ge 0$ أي أنّ $L_A \ge L_B$ ينتج أيضاً أن $a = b \Leftrightarrow L_A = L_B$.

برهن بالاعتماد على القوانين صدق القضايا الآتية:

i. إذا تساوى منصفا زاويتين في مثلث فإنّ المثلث متساوي ساقين.

ii. إذا تساوى مستقيمان متوسطان في مثلث فإنّ المثلث متساوي ساقين.

iii. إذا تساوى ارتفاعان في مثلث فإنّ المثلث متساوي ساقين.