مناقشة في الهندسة

د. علي عثمان

أستعرض في هذا المقال بعض القضايا الهندسية التي من المفضّل مناقشتها مع التلاميذ للتأكيد على الأهداف المركزيّة من تعليم الهندسة وهي تنمية وتأسيس المنطق الرياضي وتحسين طرق المناقشة للدحض أو البرهان.

1. بعد أن يتعرف الطالب على الصفات الآتية لمتوازي الأضلاع:

(i) قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر.

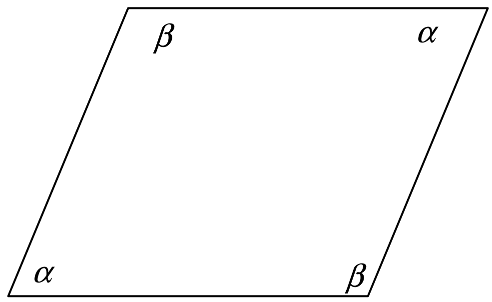
(ii) كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متساويان.

(iii) كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متساويتان.

(iv) لمتوازي الأضلاع ضلعان متوازيان ومتساويان. (هذه الصفات نابعة من تعريف متوازي أنّه شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان)، من الضروري أن نسأل عمّا إذا كانت كل واحدة من الصفات المذكورة هي صفة مُمَيِّزة لمتوازي الأضلاع. أي أنّه إذا تحققت الصفة في شكل رباعي فإنّ الشكل بالضرورة متوازي أضلاع ". (بشكل عامّ : صفة مُمَيِّزة لشيء هي صفة مكافئة لتعريف الشيء). أورد بعض الأمثلة :

أ) هل القضية " الشكل الرباعي الذي فيه كل زاويتين متقابلتين متساويتان هو متوازي أضلاع " هي قضية صواب؟

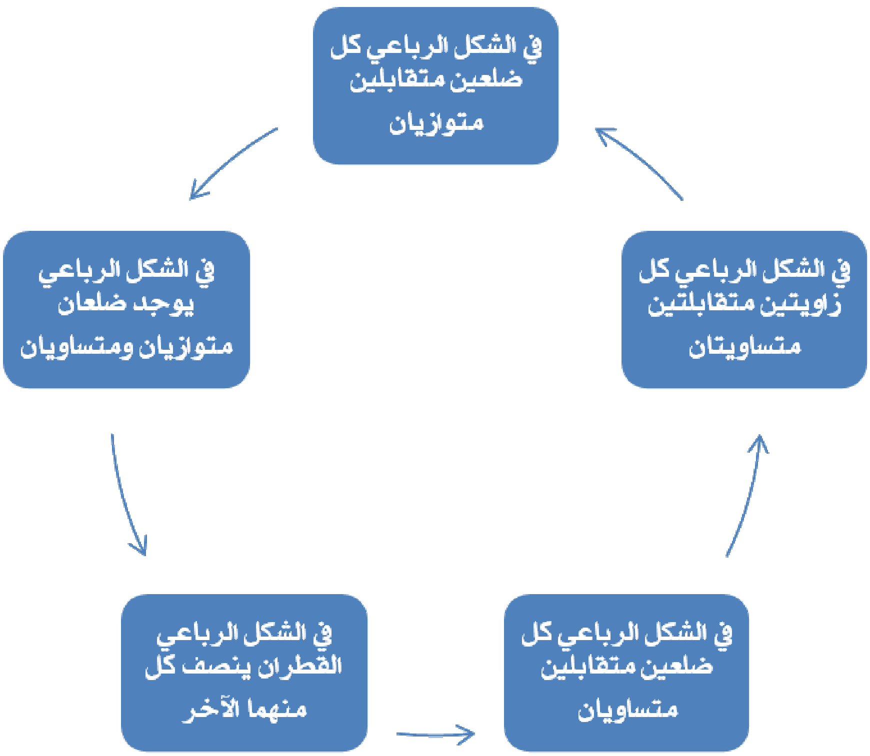
الجواب: نعم القضية هي قضية صواب ، وبرهان ذلك : نرمز للزوايا كما مبين في الشكل .



$2\alpha+2\beta=360^\circ \Leftrightarrow \alpha+\beta=180^\circ$. مجموع زاويتين في جهة واحدة من القاطع وداخليتين يساوي 180° يؤدي لتوازي كل ضلعين متقابلين . لذلك فالشكل هو متوازي أضلاع .

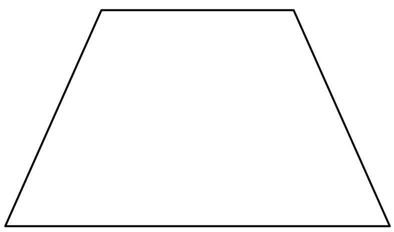
(لاحظت أنّ هناك اختلافاً بين تعامل الطلاب مع القضية المذكورة والقضية " الشكل الرباعي الذي فيه كل زاويتين متقابلتين متساويتان هو **<u>بالضرورة</u>** متوازي أضلاع " بالرغم من أنّ للقضيتين نفس المفهوم فيميل الكثيرون منهم للإجابة بأنّ القضية كاذبة ويعززون رأيهم بالقول: قد يكون الشكل مستطيلاً وقد يكون مربعاً وقد يكون معيناً فهو ليس بالضرورة متوازي أضلاع . يقولون ذلك وهم متناسون كون الأشكال التي ذكروها جميعاً هي متوازيات أضلاع).

في الواقع إنّ الصفات الأربع المذكورة أعلاه متكافئة ومكافئة للتعريف فهي صفات مُمَيِّزة لمتوازي الأضلاع. أقترح برهنة التكافؤ حسب المخطط التالي:



ب) قضية: "إذا وُجد في شكل رباعي ضلعان متوازيان وضلعان متساويان فإنّه حتماً متوازي أضلاع ".

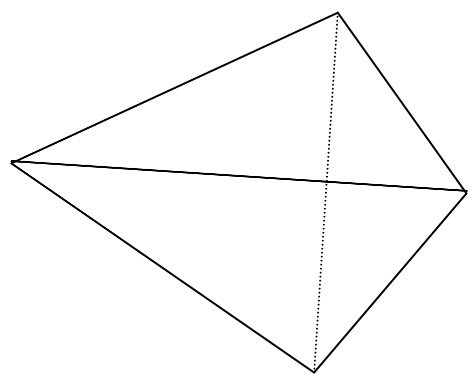
هذه قضية كذب. يوجد شكل رباعي يحقق الشروط وليس متوازي أضلاع. نشترط ألا يكون الضلعان المتوازيان متساويين. نرسم شبه منحرف متساوي الساقين. فهو يحقق الشروط وليس متوازي أضلاع.



ج) قضية: إذا نصّف قطرا شكل رباعي زوايا ه فإنّ قطريه متعامدان.

عندما يتعلم الطالب عن صفات المعين فإنّ إحدى صفاته: قطرا المعين ينصفان زواياه. بعدها نسأل إن كانت القضية العكسية صحيحة. أو نسأل إن كانت هذه الصفة هي صفة مُمَيِّزة للمعين. من السهل التأكّد من أنّ هذه الصفة هي صفة مُمَيِّزة للمعين (تطابق مثلثات مرتين). لذلك فإنّ الشكل الرباعي الذي قطراه ينصفان زواياه هو معين وبما أنّ قطري المعين متعامدان فينتج صدق القضية.

ماذا مع الصفة التي تتحقق في المعين:" القطران متعامدان" فهل هي صفة مُمَيِّزة للمعين؟ بكلمات أخرى: هل القضية:" الشكل الرباعي الذي قطراه متعامدان هو معين" هي قضية صدق؟ من السهل دحض القضية بواسطة بناء شكل رباعي قطراه متعامدان ولا ينصف أحدهما الآخر فهو ليس معيناً لأنّه ليس متوازي أضلاع. أنظر الشكل:

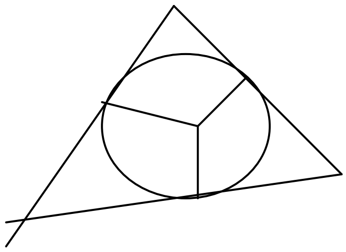


د) قضية: "إذا كان ابن الشكل الرباعي ABCD " معيناً فإنّ الشكل الرباعي ABCD هو حتماً مستطيل". (نقصد بابن شكل رباعي معطى الشكل الرباعي الذي رؤوسه منتصفات أضلاع الشكل الرباعي المعطى. الشكل الرباعي المعطى يسمى الأب بالنسبة للشكل الرباعي الابن. (أنظر [1] صفحة).

من السهل برهنة أنّ كل ضلعين متقابلين من أضلاع الابن يوازيان قطراً من أقطار الشكل الرباعي الأب وهما متساويان بحيث أنّ طول كل منهما يساوي نصف طول ذلك القطر (بالاعتماد على النظرية بخصوص المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين في المثلث). لذلك يكون الشكل الرباعي الابن معيناً إذا وفقط إذا كان قطرا الشكل الرباعي الأب متساويين. ABCD هو شكل رباعي قطراه متساويان. فهو ليس بالضرورة مستطيل. قد يكون الشكل مستطيلاً وقد لا يكون مستطيلاً ، لذلك فإنّ القضية كذب .

2. يتعلّم الطالب أنّ منصفات الزوايا الثلاث في المثلث تتقاطع في نقطة واحدة (يتم برهان هذا بالاعتماد على النظرية: كل نقطة على منصف الزاوية تبعد بنفس البعد عن ضلعي الزاوية) وأنّ هذه النقطة هي مركز الدائرة المحصورة داخل المثلث. بعد أن يتعلّم الطالب عن الأشكال الرباعية التي يمكنها حصر دوائر ويتعلم عن الشروط اللازمة والكافية للحصر تجد أنّ الطالب يدخل في وضع من الشك والتردد عندما تسأله عن صدق كل واحدة من القضايا الآتية:

هـ) " في كل مثلث يمكن حصر دائرة".



نعم القضية صواب

نُعين نقطة تقاطع منصفات الزوايا وننزل منها أعمدة على أضلاع المثلث. الأعمدة (الأبعاد) الثلاثة متساوية وكل منها يساوي نصف قطر الدائرة المحصورة.

و) قضية: " يوجد مثلث بحيث أنّ نقطة مركز الدائرة المحصورة فيه هي منتصف أحد منصفات زواياه ".

من الأخطاء الشائعة التي يقع فيها الكثير من الطلاب هو اعتبارهم أنّ نقطة تقاطع منصفات الزوايا في المثلث تقسم منصف الزاوية بالنسبة 1:2 . فهم يعممون النظرية التي تقول: " نقطة تقاطع المستقيمات المتوسطة في المثلث تقسم كل متوسط بالنسبة 1:2 " ، يعممونها بالخطأ على منصفات الزوايا (أو على الارتفاعات). من المهم أن يسأل السؤال في الصف : هل نقطة تقاطع منصفات الزوايا تقسم كل منصّف زاوية بالنسبة 1:2 كما هو الحال بالنسبة لنقطة تقاطع المتوسطات؟

الجواب على هذا السؤال سلبي. هذا يصح فقط في المثلث متساوي الأضلاع لأنّ منصفات الزوايا هي نفسها المستقيمات المتوسطة. في الواقع نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث تقسم منصّف الزاوية إلى جزأين النسبة بينهما تساوي النسبة بين مجموع ضلعي الزاوية إلى الضلع المقابل لها ، بحيث أنّ الجزء الأكبر من جهة رأس الزاوية (أنظر[2] صفحة 180) . دائماً يكون الجزءان مختلفين. بعد أن يعرف الطالب هذه الحقيقة يسهل عليه الحكم على صحة القضية " يوجد مثلث بحيث أنّ نقطة مركز الدائرة المحصورة فيه هي منتصف أحد منصفات زواياه " ويكون جوابه: مركز الدائرة هو نقطة تقاطع منصفات الزوايا في المثلث وهذه النقطة تقسم كل منصف زاوية إلى جزأين مختلفين. فالقضية كاذبة.

3. يتعلّم الطالب عن نقطة تقاطع الأعمدة المتوسطة في المثلث وأنّها مركز الدائرة التي تحصر المثلث. حتى لا يحدث الخلط بينها وبين نقطة تقاطع منصفات الزوايا من المهم أن يفهم الطالب الصيرورة كاملة. بعد أن يتعلّم الطالب عن الأشكال الرباعية التي يمكن حصرها في دائرة ويتعلّم النظرية: " الشكل الرباعي قابل للحصر في دائرة إذا وفقط إذا كان مجموع زاويتين متقابلتين من زواياه يساوي 180°". يعرف الطالب عن وجود أشكال رباعية لا يمكن حصرها في دوائر. نسأل عن صدق القضايا الآتية:

ز) قضيّة: " يمكن رسم دائرة تمر في رؤوس شكل رباعي زواياه: 107° , 100° , 78° , 75° ".

قضية كذب، الشكل الرباعي قابل للحصر في الدائرة $\Leftarrow$مجموع زاويتين متقابلتين يساوي 180° لكن من بين الزوايا المذكورة لا توجد زاويتان مجموعهما 180°.

ح) قضيّة: " إذا كان ABCD متوازي أضلاع محصور في دائرة وإذا كان $AB = 10$ cm و $BC = 8$ cm فإنّ مساحة ABCD تساوي $80\ \text{cm}^2$.

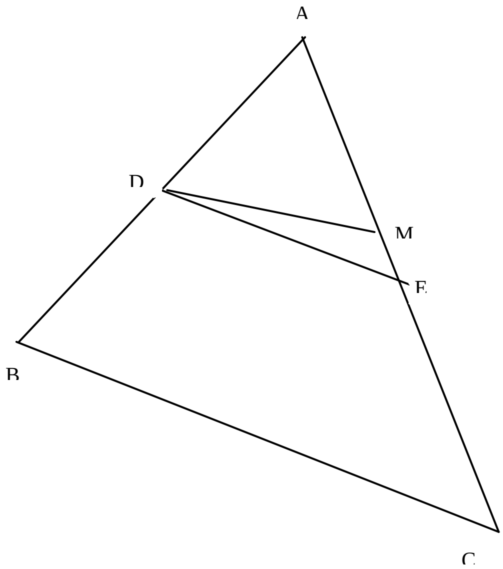
قضية صواب، كل متوازي أضلاع محصور في دائرة هو مستطيل. لأنّ: كل زاويتين متقابلتين متساويتين (لأنّه متوازي أضلاع) ومجموعها 180° (لأنّه محصور في دائرة) فكل منها 90° . لذلك فمساحته $8 \times 10\ \text{cm}^2 = 80\ cm^2$.

ط) قضيّة: "كل مثلث قابل للحصر في دائرة".

بعد أن تعلّم الطالب عن الشرط اللازم والكافي لكي يمكن حصر الشكل الرباعي داخل دائرة يحدث بعض الارتباك والتردد حين الإجابة على السؤال. نعم القضية هي قضية صواب. لأنّ الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث تلتقي في نقطة واحدة وهي تبعد أبعاداً متساوية عن رؤوس المثلث، فهي مركز الدائرة التي تحصر المثلث.

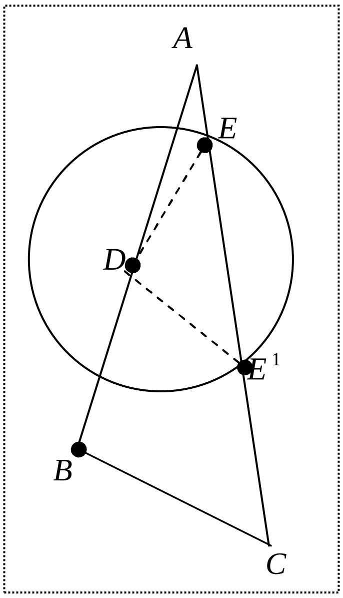
4. بعد أن يتعلّم الطالب عن النظرية: المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين في المثلث (خط المنتصفين) يوازي الضلع الثالث ويساوي نصفه تُسأل الأسئلة حول صدق القضايا الآتية:

ي) قضية: إذا كان ABC مثلثاً و D هي منتصف الضلع AB و DE يوازي BC فإنّ DE يساوي $\frac{1}{2}BC$.



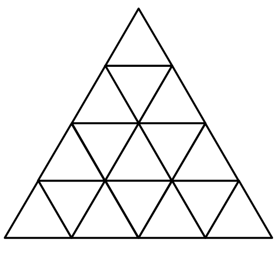
القضيّة هي قضيّة صواب. نبرهن أولاً أنّ E هي منتصف الضلع AC، ويتمّ ذلك بطريقة الفرض الخاطئ. فلو افترضنا أنّ M هي منتصف AC و $M \neq E$ فإنّ $DM \parallel BC$. لذلك يمر موازيان للمستقيم BC من النقطة D، وهذا يناقض مسلمّة المتوازيات " من نقطة خارج مستقيم معلوم يمر مستقيم واحد ووحيد يوازي المستقيم المعلوم". لذلك فإنّ E هي نقطة المنتصف لـ AC .لذلك فإنّ DE يوازي BC ويساوي نصفه.

ك) قضيّة عكسية: " إذا كان ABC مثلثاً والنقطة D هي منتصف الضلع AB والنقطة E تقع على الضلع AC بحيث أنّ $DE = \frac{1}{2}BC$ فإنّ DE يوازي BC ".



القضية هي قضية كذب . إثبات ذلك: نرسم مستقيماً ونعين عليه نقطة D. ثمّ نرسم دائرة مركزها D. نعين A على نفس المستقيم خارج الدائرة. من A نرسم قاطعاً للدائرة يقطعها في E وَ E^1. نعين B بحيث أنّ $AD = BD$. من B نرسم موازياً لـ DE^1. لذلك $DE^1 = \frac{1}{2}BC$. من الواضح أنّ $DE = DE^1 = \frac{1}{2}BC$ لكن DE لا يوازي BC.

5. قضية: " يمكن تقسيم كل مثلث إلى 16 مثلثاً بحيث أنّ جميعها مثلثات متطابقة".



قضية صواب: نعرف أن المستقيمات الواصلة بين منتصفات أضلاع المثلث تقسمه إلى أربعة مثلثات متطابقة. ومن ثم ننفذ العملية على كل واحد من المثلثات.

6. إذا كانت أطوال أضلاع المثلث ABC ، $13\text{ cm}, 14\text{ cm}, 15\text{ cm}$ ، وأطوال أضلاع المثلث DEF تساوي أطوال المتوسطات في المثلث ABC فإنّ مساحة المثلث DEF تساوي $63\ \text{cm}^2$.

قضية صواب: مساحة المثلث ABC ، حسب قانون هيرون، تساوي $84\ \text{cm}^2$. مساحة مثلث المتوسطات تساوي $\frac{3}{4}$ مساحة ABC. لذلك $S_{DEF}=\frac{3}{4}\times 84=63cm^2$. (أنظر [3] صفحة 56).

7. إذا كانت أطوال أضلاع مثلث $26\text{ cm}, 28\text{ cm}, 30\text{ cm}$ فإنّ مساحة الدائرة المحصورة في داخله تساوي $64\pi\ \ \text{cm}^2$.

قضية صواب، حسب قانون هيرون فإنّ مساحة المثلث تساوي $336cm^2$. مساحة المضلّع الذي يحصر دائرة نصف قطرها r تساوي (محيط المضلّع) $\times \frac{1}{2}r$. لذلك فإنّ:

مساحة المثلث= $\frac{1}{2}r\times(26+28+30)=336$ لذلك $r=8$. مساحة الدائرة $\pi r^2=\pi\times 8^2=64\pi$.

8. إذا تقاطعت منصفات زوايا الشكل الرباعي في نقطة واحدة فإنّ مجموع ضلعين متقابلين من أضلاعه يساوي مجموع الضلعين المتقابلين الآخرين.

قضية صواب، منصفات الزوايا تلتقي في نقطة واحدة هذا يكافئ أن الشكل الرباعي يحصر دائرة. بما أنه يحصر دائرة فإن مجموع ضلعين متقابلين يساوي مجموع الضلعين المتقابلين الآخرين.