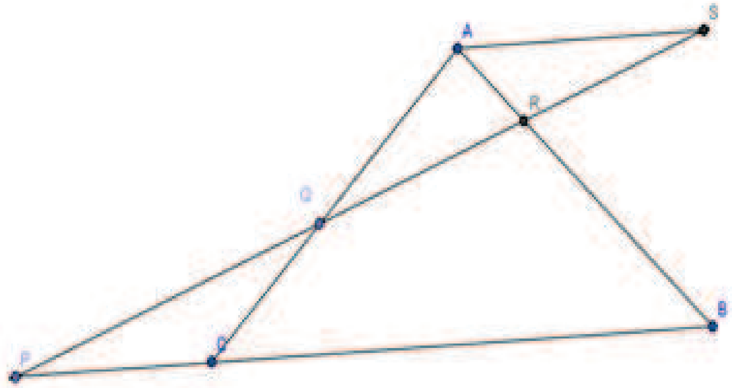
نظرية مينيلاوس وأحد استعمالاتها

بقلم د. علي عثمان

أعرض في هذا المقال أحد استعمالات **نظرية مينيلاوس** في الحسابات الهندسية. أبدأ بعرض برهاناً للنظرية والذي يعتمد على **نظريات التشابه**. ليكن ABC مثلثاً وليكن المستقيم L قاطعاً لأضلاعه (انظر الشكل) يقطع AB في النقطة R ويقطع AC في النقطة Q ويقطع امتداد CB في النقطة P.



تتحقق المساواة:

$$\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BR}{RA}=1$$

برهان: من A نمرر موازياً للضلع BC، يقطع امتداد PR في النقطة S. نلاحظ التشابه بين المثلثين ARS وَ BRP وكذلك التشابه بين المثلثين AQS وَ CQP

لذلك يتحقق التناسبان:

$$\frac{AS}{PB}=\frac{AR}{BR} \quad \text{وَ} \quad \frac{AS}{CP}=\frac{AQ}{CQ}$$

من التناسب الأول:

$$AS=\frac{AR\cdot PB}{BR}$$

ومن التناسب الثاني:

$$AS=\frac{AQ\cdot CP}{CQ}$$

لذلك:

$$\frac{AR}{BR}\cdot PB=\frac{AQ\cdot CP}{CQ}$$

وهو يكافئ:

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

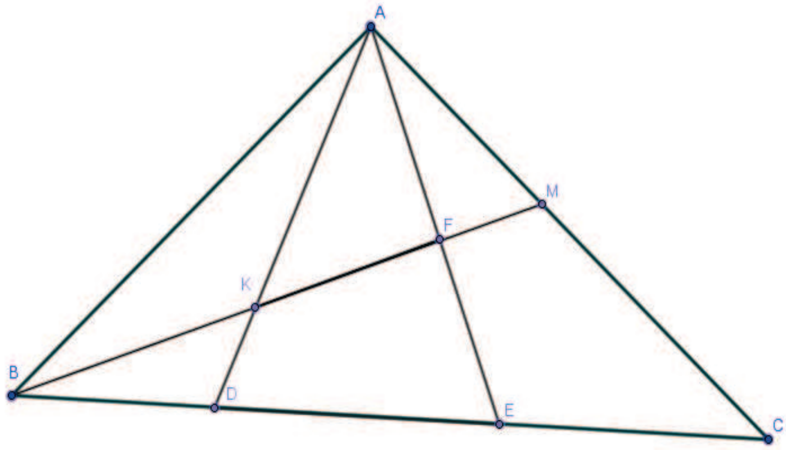
وهو يكافئ: $\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BR}{RA}=1$

مسألة 1: في الشكل المثلث ABC، معلوم أن:

$AM = MC = 4.5cm$ ؛ $DE = 4cm$ ؛ $BD = EC = 3cm$

وأن مساحة المثلث ABC تساوي 35 سم^2 .

احسب مساحة الشكل الرباعي KFED.



حل: نعتمد على نظرية مينيلاوس.

(1) حسب نظرية مينيلاوس بالنسبة للمثلث ADC والقاطع $\overline{BKFM}$ يتحقق أن:

$$\frac{AK}{KD}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$$

لذلك فأن:

$$\frac{AK}{KD}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{4.5}{4.5}=1$$

المعادلة (1)

$$\frac{AK}{KD}=\frac{10}{3}$$

(2) حسب نظرية مينيلاوس بالنسبة للمثلث AEC والقاطع $\overline{BKFM}$ يتحقق أن:

المعادلة (2) $\frac{AF}{FE}\cdot\frac{EB}{BC}\cdot\frac{CM}{MA}=1 \Leftrightarrow \frac{AF}{FE}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{4.5}{4.5}=1 \Leftrightarrow \frac{AF}{FE}=\frac{10}{7}$

من المعادلة (1) ينتج أن مساحة المثلث BKD تساوي $\frac{3}{13}\times$ (مساحة المثلث ABD)

أي أن مساحة BKD تساوي $35\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{13}=\frac{63}{26}$ سم^2.

(انتبه إلى أن مساحة ABD تساوي $\frac{3}{10}$ مساحة ABC).

من المعادلة (2): مساحة المثلث BFE تساوي $\frac{7}{17}\times$ (مساحة المثلث ABE) لذلك فإن

مساحة المثلث BFE تساوي: $\frac{7}{17}\cdot\frac{7}{10}\cdot 35cm^2=\frac{343}{34}cm^2$

انتبه إلى أن مساحة ABE تساوي $\frac{7}{10}$ مساحة ABC.

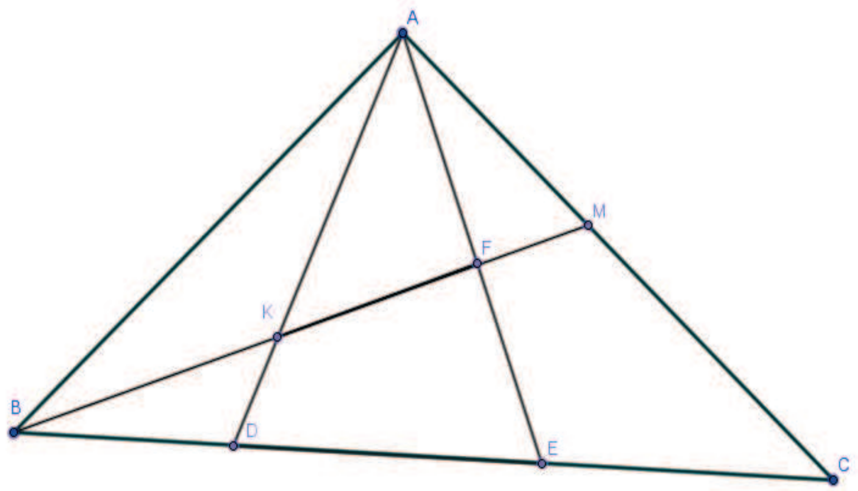
لذلك فإن مساحة الشكل الرباعي KFED تساوي:

$$\frac{343}{34}-\frac{63}{26}=\frac{4459-1071}{2\cdot 17\cdot 13}=\frac{3388}{442}\cong 7.665cm^2$$

مسألة 2 (تعميم): في الشكل المثلث ABC، معلوم أن:

$AM=i$, $MC=k$ ، $DE=j$ ، $BD=n$, $EC=m$

وأن مساحة المثلث ABC تساوي S سم^2. احسب مساحة الشكل الرباعي KFED.



حل: نعتمد على نظرية مينيلاوس.

(3) حسب نظرية مينيلاوس بالنسبة للمثلث ADC والقاطع $\overline{BKFM}$ يتحقق أن:

$$\frac{AK}{KD}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$$

لذلك فأن:

$$\frac{AK}{KD}\cdot\frac{n}{n+m+j}\cdot\frac{k}{i}=1$$

$$\frac{AK}{KD}=\frac{i(n+m+j)}{nk}$$

المعادلة (1)

نرمز: $n+j+m=a$

(4) حسب نظرية مينيلاوس بالنسبة للمثلث AEC والقاطع $\overline{BKFM}$ يتحقق أن:

$$\boxed{\text{المعادلة } (2)} \quad \frac{AF}{FE}\cdot\frac{EB}{BC}\cdot\frac{CM}{MA}=1 \Leftrightarrow \frac{AF}{FE}\cdot\frac{n+j}{a}\cdot\frac{k}{i}=1 \Leftrightarrow \frac{AF}{FE}=\frac{ia}{k(n+j)}$$

(5) **مـن المعادلـة (1)** ينـتج أن مسـاحة المثلـث BKD تسـاوي $\frac{nk}{ia+nk}\times$ (مسـاحة المثلـث ABD)

أي أن مساحة المثلث BKD تساوي:

$$\frac{nk}{ia+nk}\cdot\frac{n}{a}\cdot S$$

$$\boxed{\text{وهي تساوي:}} \quad \frac{n^2k}{a(ia+nk)}\cdot S$$

(انتبه إلى أن مساحة ABD تساوي $\frac{n}{a}\times$ (مساحة ABC).

من المعادلة (2): مساحة المثلث BFE تساوي $\frac{k(n+j)}{ia+k(n+j)}\times$**(مساحة المثلث ABE).**

لذلك فإن مساحة المثلث BFE تساوي:

$$\frac{k(n+j)}{ia+k(n+j)}\cdot\frac{n+j}{a}\cdot S = \frac{(n+j)^2k}{a(ia+k(n+j))}\cdot S$$

(**انتبه** إلى أن مساحة ABE تساوي $\frac{n+j}{a}\times$ **(مساحة ABC)**. بما أن مساحة الشكل الربـاعي KFED تساوي الفرق بين مساحة المثلث BFE ومساحة المثلث BKD،

لذلك فإن مساحة الشكل الرباعي KFED تساوي $\frac{kS}{a}\cdot\left(\frac{(n+j)^2}{ia+k(n+j)}-\frac{n^2}{ia+nk}\right)$.