وميض الكسور (حول خلط الكسور)

(من كتاب الرّائع في الرياضيات – د. علي عثمان)

يخطئ الكثير من التلاميذ عند جمع الكسور. لأنّ حدسهم يوجههم إلى أن يجمعوا البسوط ويقسموا على مجموع المقامات.، يحدث ذلك لأن ميل الإنسان إلى البساطة هو أمر طبيعي، وهو ما يتّخذه الحدس لأوّل وهلة. إنّ العلم يناقش الأمور الحدسية فيؤكد ما هو صحيح منها ويرفض ما هو خطأ ويصححه. إن الظن هو من التوقعات التي تعتمد على الحدس. فما دام من الضروري استبدال الظن باليقين فان من الضروري تصحيح التوجهات الحدسية واستبدالها بالنظريات العلمية وتأكيدها منطقيا. الحدس يتوقع والمنطق يشكّ في كون التوقع صادقا أم كاذباً فيسعى لفحص الأمر.

عندما يخطئ التلميذ عند جمع كسرين، فيعتبر أن مجموعهما هو الكسر الناتج من قسمة مجموع البسطين على مجموع المقامين، يكتفي بعض المعلمين بان يقولوا لتلاميذهم، عندما يخطئون، أن طريقتهم خطأ ويذكرون لهم الطريقة الصحيحة. وبذلك تجد الكثير من التلاميذ قد بقوا على حالهم، يعملون بما يمليه عليهم حدسهم.

المعلم يسأل: كم يساوي $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ ؟ يعرف التلاميذ أنّ الجواب يساوي 1. ويقول لو حسبناها حسب ما تظنون فان الجواب هو $\frac{2}{4}$ وهو أيضا يساوي $\frac{1}{2}$ ، يقتنع الطلاب بخطئهم فيهتم معظمهم لحديث معلمهم فيتعلمون منه.

ليس غريبا أن يعود التلاميذ على خطئهم هذا فيما بعد، لأن دحض الطريقة الحدسية لم يكن كافيا ولأنّ الميل للاختصار قويّ جدا.

تؤكد هذا أخطاء التلاميذ الكثيرة في الكسور والكسور الجبرية في المراحل المتقدمة والاستعمال المكثف للحاسبات لأبسط الحسابات. قد تُكتَب أمام التلاميذ أشياء بشكل عفوي، هي بمثابة أخطاء، تدعم أخطاء التلاميذ، فتزيد من أخطائهم. سأستعرض هنا الخطأ التالي:

من أجل تقييم أفضل للطالب في أي مادة من مواد التعليم، ومن اجل حثّ التلاميذ على المراجعة يقوم المعلمون بإجراء أكثر من اختبار واحد في الفصل الدراسي. يتقدم التلاميذ إلى اختبار في منتصف الفصل واختبار أشمل في نهايته. لاحتساب النتيجة النهائية تُعطى نسبة أكبر لاختبار نهاية الفصل، ولأجل عدالة التقييم وتفاديًا لكثرة التساؤلات من قبل التلاميذ عن معدلهم في المادة (العلامة

[הקלד כאן]

النهائية)، يلجأ الكثير من المعلمين إلى تسجيل علامة التلميذ في الاختبار الأول وعلامته في الاختبار الثاني وعلامته النهائية. فيرى التلميذ الذي حصل في الاختبار الأول على علامة $\frac{25}{30}$ وفي الاختبار الثاني على علامة $\frac{60}{70}$ على ورقته، العملية:

$\frac{25}{30}+\frac{60}{70}=\frac{85}{100}$ (على اعتبار أنّ نسبة الاختبار الأول هي 30% ونسبة الاختبار الثاني هي 70%).

ألا تعيد هذه العملية التي سجلها المعلم إلى أذهان التلاميذ تلك العملية التي أملاها عليهم حدسهم ورفضها معلمهم السابق وعلمهم ما هو أشدّ تعقيدا!! ها هو هذا المعلم الذي يحظى بتقديرهم أيضاً يستعملها. فالجواب هو $\frac{85}{100}$ هي العلامة الحقيقية التي يستحقها التلميذ. لا يشك التلاميذ في حساب علاماتهم من قبل معلمهم. (قد يكون سبب عدم اكتراث التلاميذ للعملية هو اهتمامهم بعلامتهم وانشغالهم بعلامات زملائهم).

لو سأل التلميذ معلمه عن السر في هذه العملية، ولماذا لم يحسبها كما تجمع الكسور لأسعد ذلك السؤال المعلم لنباهة تلميذه. لا يشكّ أحد في أنّ علامة التلميذ النهائية هي $\frac{85}{100}$ فعلاً ، وكذلك لا يشكّ أحد في أنّ مجموع الكسرين $\frac{25}{30}$ و $\frac{60}{70}$ لا يساوي $\frac{85}{100}$. أيّ أنّ $\frac{25}{30}+\frac{60}{70}\neq\frac{85}{100}$.

فأين الخطأ؟

لقد نفذّ المعلم عملية جبرية على العددين $\frac{25}{30}$ و $\frac{60}{70}$ هذه العملية ليست عملية الجمع. فالخطأ هو كتابة الإشارة +. فالعملية التي تم تنفيذها ليست + وإنّما هي عملية أخرى وينبغي أن نلائم لها رمزا آخر. أقترح الرمز $\oplus$، أي أنّي أقترح كتابة $\frac{25}{30}\oplus\frac{60}{70}=\frac{85}{100}$ بدلاً مما كتبه المعلم.

ما دام التلاميذ يخطئون أثناء جمعهم للكسرين $\frac{c}{d}$ و $\frac{a}{b}$، وحدسهم يقودهم إلى الحساب $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$، فمن الضروري الاهتمام بهذا الخطأ. الاهتمام بالخطأ، لا يعني الاكتفاء بنعته "خطأ" أو إعطاء مثال كالمثال $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$.

إنّ ما ينفذه التلاميذ على الكسرين هو عملية جبرية تختلف عن عملية الجمع وهي عملية جديرة بالنّقاش. ينبغي تعليمها من أجل منع الوقوع في الخطأ، ومحاولة فهم مدلولها الرياضي. نرمز لهذه العملية بإشارة تختلف عن +. اقترح الإشارة لها بـ $\oplus$ (وهو الرمز الذي سأعتمده في هذا المقال) أو بأيّة إشارة أخرى تختلف عن الإشارات الحسابية الأربع.

[הקלד כאן]

نعرّف العملية $\oplus$ على النحو التالي: $\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

لكل عملية من العمليات الأربع الحسابية التي يتعلمها التلميذ يوجد مفهوم حسابي. فالسؤال الطبيعي الذي يسأل: هل يوجد مفهوم حسابي للعملية $\oplus$ ؟

ما دام هناك مفهوم كبير للنتيجة $\frac{85}{100}$ في التمرين $\frac{25}{30}\oplus\frac{60}{70}=\frac{85}{100}$ وهو العلامة النهائية التي ستظهر في شهادة التلميذ فمن الواضح انه يوجد مفهوم رياضي للعملية $\oplus$. فما هو هذا المفهوم؟ ماذا نسمي هذه العملية؟

من الممكن أن نعتبر أنّ الامتحان مؤلف من 30 مسألة صغيرة، قيمة كل منها درجة واحدة. فان أجاب التلميذ إجابة صحيحة على تلك المسألة حصل على "1" وإن أجاب إجابة خطأ حصل على "0". فالامتحان الأول هو عبارة عن 30 عددا. بما أنّ التلميذ حصل على علامة $\frac{25}{30}$ فإنّ ما يقابل هذا متوالية مكونة من 30 عددا منها 25 "1" و 5 "0". المعدل الحسابي لهذه الأعداد هو مجموعها مقسوماً على عددها وهو يساوي $\frac{25}{30}$. كذلك الأمر بالنسبة للامتحان الثاني، فمن الممكن ان نراه 70 مسألة صغيرة قيمة كل منها درجة واحدة ويقابل العلامة $\frac{60}{70}$ متوالية مؤلفة من 70 عددًا منها 60 "1" و 10 "0"، المعدل الحسابي لهذه الأعداد هو مجموعها على عددها وهو يساوي $\frac{60}{70}$.

عند " دمج" الامتحانين معا نرى 100 مسألة صغيرة، منها 30 مسألة في الامتحان الأول و 70 مسألة في الامتحان الثاني، 25 "1" و 5 أصفار ثم 60 "1" و 10 أصفار. يلائم هذا الدمج: 100 عدد منها 85 "1" و 15 "0". المعدل الحسابي لهذه الأعداد هو مجموعها على عددها وهو يساوي $\frac{85}{100}$. فالعلامة $\frac{85}{100}$ هي فعلاً معدل حسابي. ولكن ليست المعدل الحسابي للعددين $\frac{25}{30}$ و $\frac{60}{70}$ لأنّ المعدل الحسابي لهما هو $\frac{1}{2}(\frac{25}{30}+\frac{60}{70})$، وهو لا يساوي $\frac{85}{100}$.

فمنعًا للالتباس سأسمي العملية $\oplus$ بعملية "الدمج". أما النتيجة فأسميها "معدّل الدمج". (في حالة العلامات نسميها ببساطة "معدّل").

[הקלד כאן]

مثال آخر: وعاء "أ" فيه 8 كرات منها 6 كرات بيضاء والكرات الباقية ليست بيضاء. وعاء "ب" فيه 10 كرات منها 4 كرات بيضاء والكرات الباقية ليست بيضاء. ندمج الكرات التي في الوعاءين في وعاء واحد. بعد الدمج يصبح لدينا 18 كرة منها 10 كرات بيضاء والكرات الباقية ليست بيضاء. نلائم للمعطيات والنتيجة تمرين الدمج الآتي:

$$\frac{6}{8} \oplus \frac{4}{10} = \frac{10}{18}$$

ما هي العلاقة بين معدّل دمج الكسرين والكسرين؟

لو فرضنا أنّ التلميذ حصل على علامة $\frac{14}{30}$ في الامتحان الأوّل وعلى علامة $\frac{60}{70}$ في الامتحان الثاني، فمن الواضح أنّ علامته النهائية هي $\frac{74}{100}$، وهي أكبر من العلامة المنخفضة الأولى وأقلّ من علامته الثانية. (لاحظ أنّ $\frac{60}{70} > \frac{14}{30}$). أيّ أنّ $\frac{60}{70} > \frac{74}{100} > \frac{14}{30}$. لقد حزن التلميذ عندما حصل على العلامة الأولى $\frac{14}{30}$، وفرح عندما حصل على العلامة الثانية $\frac{60}{70}$ لأنها حسّنت معدله. ونستطيع أن نقول، أنّه فرح لحصوله على العلامة الثانية وحزن عندما تذكّر العلامة الأولى لأنّها قللت من معدله.

نلاحظ أنّ معدّل دمج الكسرين هو كسر بينهما. لو مزجنا محلولاً من الملح، شديد الملوحة، مع محلول من الملح قليل الملوحة لحصلنا على محلول ملوحته أقل ملوحة من المحلول شديد الملوحة وأشدّ ملوحة من المحلول قليل الملوحة.

استنتاج

نظرية

إذا كان b و d موجبين و $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$ فإنّ $\frac{c}{d} > \frac{a+c}{b+d} > \frac{a}{b}$. (أيّ أنّ: $\frac{c}{d} > \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} > \frac{a}{b}$ أي أنّ دمج الكسرين أكبر من الكسر الأصغر بينهما وأصغر من الكسر الأكبر بينهما).

برهان

بما أنّ b و d موجبان و $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$ فإنّ $a \cdot d > c \cdot b$

[הקלד כאן]

لذلك فإنّ $a\cdot d+a\cdot b> \mathrm{c}\cdot\mathrm{b}+\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}$

لذلك فإنّ $a\cdot(d+b)> \mathrm{b}\cdot(\mathrm{c+a})$.

نقسم الطرفين على b وعلى $d+b$ فنحصل على $\frac{a}{b}>\frac{c+a}{b+d}$

(لأنّ b و $d+b$ موجبان فلا تتغيّر إشارة التبايّن).

نبرهن التباين الأيمن: بما أنّ $a\cdot d> \mathrm{c}\cdot\mathrm{b}$ فإنّ $a\cdot d+c\cdot d> \mathrm{c}\cdot\mathrm{b}+\mathrm{c}\cdot\mathrm{d}$.

لذلك فإنّ: $d\cdot(a+c)> \mathrm{c}\cdot(\mathrm{b}+\mathrm{d})$. نقسم الطرفين على b وعلى $d+b$ فنحصل على $\frac{c+a}{b+d}>\frac{c}{d}$

(لأنّ b و $d+b$ موجبان فلا تتغيّر إشارة التبايّن).

نتيجة

إذا كان b و d موجبين و x و y موجبين و $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ فإنّ $\frac{a}{b}>\frac{a\cdot x+c\cdot y}{b\cdot x+d\cdot y}>\frac{c}{d}$.

برهان: بما أنّ $\frac{a\cdot x}{b\cdot x}=\frac{a}{b}$ و $\frac{c\cdot y}{d\cdot y}=\frac{c}{d}$ ، نعود للنظرية السابقة فنستبدل d,c,b,a على التناظر بـ $a\cdot x\ ,\ b\cdot x\ ,\ c\cdot y\ ,\ d\cdot y$. بما أنّ $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ فإنّ $\frac{a\cdot x}{b\cdot x}>\frac{c\cdot y}{d\cdot y}$

بما أنّ $b\cdot x$ و $d\cdot y$ موجبان فإنّ $\frac{a}{b}>\frac{a\cdot x+c\cdot y}{b\cdot x+d\cdot y}>\frac{c}{d}$.

سؤال 1: بين الكسرين $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{5}$ توجد مالا نهاية من الكسور. كيف تؤكّد ذلك؟

[הקלד כאן]

حل: بما أنّ $\frac{n}{5\cdot n}=\frac{1}{5}$ وبما أنّ $\frac{1}{5}>\frac{1}{6}$ لذلك فإنّ $\frac{n}{5\cdot n}>\frac{1}{6}$.

حسب النظرية ينتج أنّ $\frac{1}{5}>\frac{n+1}{5\cdot n+6}>\frac{1}{6}$. أي أنّ لكل n طبيعي فإنّ $\frac{n+1}{5\cdot n+6}$ و كسر بين الكسرين $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{5}$.

جميع حدود المتوالية الآتية هي كسور بين الكسرين $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{5}$:

$$\frac{2}{11},\frac{3}{16},\frac{4}{21},\frac{5}{26},\frac{6}{31},\frac{7}{36},\frac{8}{41},\frac{9}{46},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

هل توجد كسور أخرى بين الكسرين $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{5}$؟

جواب: توجد مالانهاية من الكسور الأخرى بين الكسرين $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{5}$.

نلاحظ أنّ $\frac{n}{5\cdot n}=\frac{1}{5}$ و $\frac{m}{6\cdot m}=\frac{1}{6}$.

لذلك فحسب النظرية فإنّ $\frac{1}{5}>\frac{n+m}{5\cdot n+6\cdot m}>\frac{1}{6}$ لكل n و m طبيعيين.

مثلاً عندما نحدد قيمة m نجد متوالية لانهائية من الكسور بين الكسرين $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{5}$.

فلو حددنا $m=3$ نحصل على المتوالية الآتية التي جميع حدودها هي كسور بين الكسرين $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{5}$:

$$\frac{4}{23},\frac{5}{28},\frac{6}{33},\frac{7}{38},\frac{8}{43},\frac{9}{48},\frac{10}{53},\frac{11}{58},\frac{12}{63},\ldots\ldots\ldots\ldots$$

سؤال 2: هل توجد حدود مشتركة بين المتواليتين:

$$\frac{2}{11},\frac{3}{16},\frac{4}{21},\frac{5}{26},\frac{6}{31},\frac{7}{36},\frac{8}{41},\frac{9}{46},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

[הקלד כאן]

$\frac{4}{23}, \frac{5}{28}, \frac{6}{33}, \frac{7}{38}, \frac{8}{43}, \frac{9}{48}, \frac{10}{53}, \frac{11}{58}, \frac{12}{63}, \dots\dots\dots\dots$ ؟

سؤال 3: جد جميع الكسور ذوات مقام 103 بين الكسرين $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{5}$.

حل: نفرض أنّ n عدد طبيعي ويحقق $\frac{1}{6} < \frac{n}{103} < \frac{1}{5}$.

لذلك $\frac{103}{6} < n < \frac{103}{5}$ لذلك $17\frac{1}{6} < n < 20\frac{3}{5}$.

بما أنّ n عدد طبيعي فإنّ $n = 18$ أو $n = 19$ أو $n = 20$.

توجد ثلاثة حلول للمسألة وهي:

$$\frac{20}{103}, \quad \frac{19}{103}, \quad \frac{18}{103}.$$

سؤال 4: بين الكسرين $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ توجد مالا نهاية من الكسور. كيف تؤكّد ذلك؟

سؤال 5: بين الكسرين $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{11}$ توجد مالا نهاية من الكسور. كيف تؤكّد ذلك؟

سؤال6:اكتب الحدود العشرة الأولى لمتوالية لانهائية من الكسور الواقعة بين الكسرين $\frac{1}{7}$ و $\frac{1}{6}$.

سؤال 7:اكتب الحدود العشرة الأولى لمتوالية لانهائية من الكسور الواقعة بين الكسرين $\frac{1}{9}$ و $\frac{1}{10}$.

سؤال 8: جد جميع الكسور ذوات مقام 107 بين الكسرين $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{4}$.

سؤال 9: جد جميع الكسور ذوات مقام 203 بين الكسرين $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{7}$.

[הקלד כאן]

سؤال 10: اكتب الحدود العشرة الأولى لمتوالية لانهائية من الكسور الواقعة بين الكسرين $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ ثمّ اكتب الحدود العشرة الأولى لمتوالية أخرى لانهائية من الكسور الواقعة بين الكسرين $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ ثمّ افحص إن كانت هناك حدود مشتركة بين المتواليتين.

سؤال11: اكتب الحدود العشرة الأولى لمتوالية لانهائية من الكسور الواقعة بين الكسرين $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{5}$. ثمّ اكتب الحدود العشرة الأولى لمتوالية أخرى لانهائية من الكسور الواقعة بين الكسرين $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{5}$ ثمّ افحص إن كانت هناك حدود مشتركة بين المتواليتين.